APUNTES DE

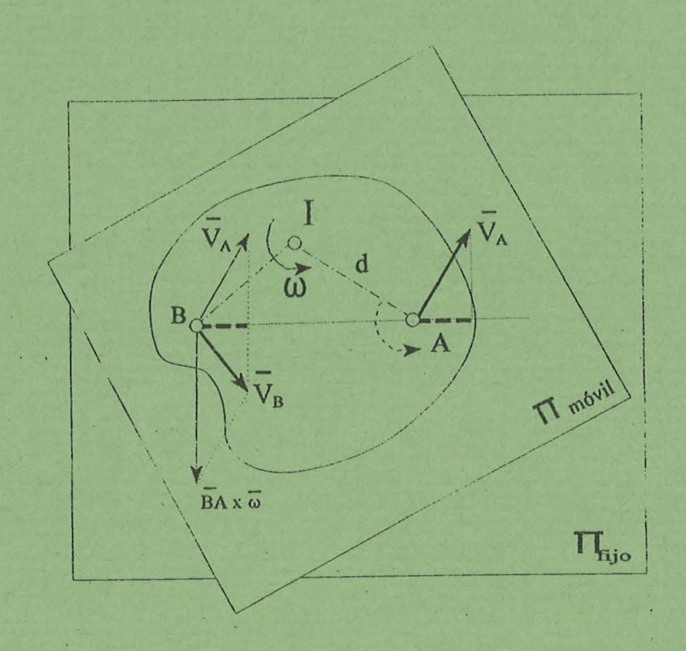
CINEMÁTICA

DESARROLLADOS Y ELABORADOS

por

ISABEL MÁS ROBLEDO

SOBRE LAS LECCIONES TÉCNICAS IMPARTIDAS POR
EL CATEDRÁTICO FÉLIX SORIANO SANTANDREU



CUADERNOS DE *APOYO*
A LA DOCENCIA DEL
INSTITUTO JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA DE
MADRID

Cuaderno Nº 9.01
ISBN: 84-89977-05-4
Depósito Legal: M-44006-1997

V. FUNCIONES PARAMÉTRICAS

V.1 SISTEMA DE REFERENCIA

Cuando estudiemos algo que pueda moverse o simplemente estar en reposo necesitaremos por fuerza referirlo a un espacio geométrico, fijo o no, para saber si lo que se mueve lo hace por sí mismo o porque el marco se mueve y él no o porque ambos se mueven.

Análogamente, cuando tengamos definida una magnitud física cuyo valor o características dependan de la localización, será imprescindible definir o acotar el espacio para poder referirnos a él. Hablaremos pues de sistemas o marcos referenciales que, según sus características, podremos clasificar como:

- *INERCIALES*, cuando no se vayan a mover o, de hacerlo, que sea recorriendo espacios iguales en tiempos iguales sin cambiar su orientación;
- *NO INERCIALES*, cuando lo vayan a hacer de forma distinta a la anterior.

En realidad no habrá posibilidad de encontrar un marco absolutamente fijo y, por tanto, tendremos que elaborar toda la teoría bajo el postulado de que existe, y lo llamaremos igualmente *Inercial*. La forma de materializarlo será, por lo general, mediante tres planos ortogonales cuya intersección determinará los ejes coordenados, denominando origen de referencia el punto común.

V.2 PUNTO GEOMÉTRICO, PUNTO FÍSICO Y PUNTO MATERIAL

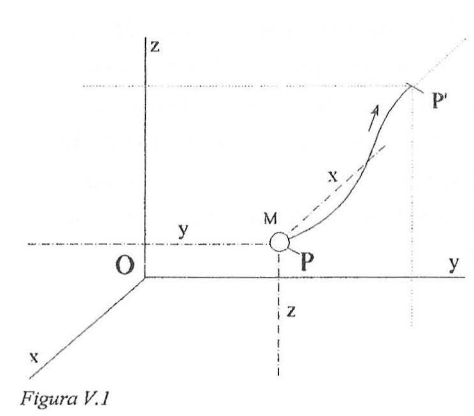


Figura V.1

Una vez elegido el marco referencial, cada punto geométrico P se "localizará" en el espacio mediante sus tres distancias a los planos coordenados P(x y z), aunque en realidad no se podrá mover; es decir, que los puntos geométricos "existirán" tan solo como localización geométrica o referencia espacial en sí. Por el contrario, un punto físico o un punto material, aún no ocupando volumen por no tener dimensiones como aquél, se definirá como un ente de razón o material que, a diferencia del punto geométrico, podrá ocupar en un instante dado la posición P y al siguiente cambiar a otra posición P'; es decir, se podrá mover y variar su posición en el marco referencial, adoptando las coordenadas que, en cada instante, tenga el punto geométrico "a ocupar".

En otras palabras, mientras con el ***punto geométrico*** va a ser el observador quién se vaya a mover, en general para analizar la repercusión del cambio de posición, con el punto físico o material el movimiento será intrínseco diferenciándose entre ambos porque:

- el ***punto material***, entendido como partícula sin volumen pero con masa, solo podrá moverse en una determinada dirección, impuesta por las características del entorno, mientras que
- el ***punto físico***, entendido como ente físico o abstracción no necesariamente material que no se va a mover, en general, aunque lo pueda parecer, estando asociando a conceptos como variación, propagación o transmisión.

V.3 VECTOR DE POSICIÓN. VARIACIÓN. DESPLAZAMIENTO.

El vector de posición $\vec{r}$ es como el modelo de referencia en un determinado marco, pues tiene siempre su origen en O y su extremo en un punto geométrico P: $\vec{r} = \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, aunque lo ocupe o vaya a ocupar en un instante determinado un punto M material. Es decir, si bien el objeto de la Mecánica es el conocimiento de la posición en todo instante de los sistemas materiales a partir de las causas que pueden modificar dicha posición, no solo serán de nuestro interés los puntos geométricos ligados a lo largo del tiempo a la partícula material, sino que también podrán serlo otros puntos no necesariamente materiales que vayan a intervenir en su movimiento de manera especial y, por supuesto, los puntos de su entorno en los que estudiaremos la variación de las funciones asociadas al espacio geométrico en general.

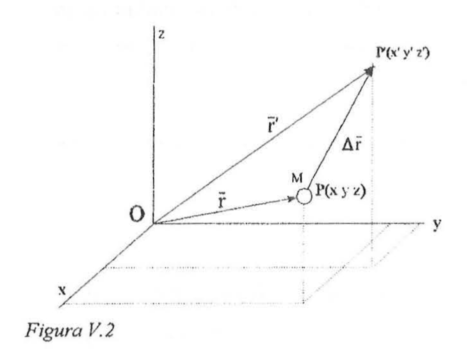


Figura V.2

Sin entrar ahora en las causas que pueden originarlo, entenderemos por ***variación de posición*** "de un punto físico o material" (ya que el geométrico es el único que no podrá variar de posición), el cambio de punto geométrico "ocupado" en el mismo marco referencial, es decir, la variación de $\vec{r}$ a $\vec{r}'$ en el vector de posición. En ese sentido podemos entender la nueva posición del punto en P' como una posición $\Delta\vec{r}$ relativa al punto P ocupado con anterioridad; es decir, como un vector de posición relativo a P que denominaremos ***vector desplazamiento*** del punto físico o material y que podremos expresar como $\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$, o lo que es igual: $\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$.

Por funcionalidad, estos desplazamientos los tomaremos en nuestro estudio muy pequeños ***-diferenciales-*** ya que, tanto en la variación de las magnitudes físicas posicionales (función de la posición), como en la propia variación de posición a seguir, cuanto más pequeños sean los desplazamientos planteados, menor será el error cometido ante las hipótesis simplificativas adoptadas para su resolución (en este sentido conviene tener siempre presente que la Física es tan solo una herramienta no exacta, aunque se apoye en otra exacta, con la que intentamos aproximarnos al hecho real).

A su vez el desplazamiento podrá ser *REAL*, $d\vec{r}$, cuando conlleve la idea de recorrido ***único***, tanto del punto físico (recorrido impuesto mentalmente) como del punto material (recorrido determinado mecánicamente), para alcanzar una determinada posición; mientras que definiremos el desplazamiento *VIRTUAL*, $\delta\vec{r}$, como ***cualquier*** desplazamiento que podamos imaginar, en el entorno del punto geométrico, sin implicar la idea de recorrido en él, ya que no se trata de ir a una determinada posición, sino de encontrar determinadas posiciones en las que, tanto para el punto físico como el material, se cumpla alguna condición especial. En cualquier caso, la variación de posición de un punto físico o material vendrá condicionada por sus posibilidades de movimiento o grados de libertad.

V.4 GRADOS DE LIBERTAD DEL PUNTO FÍSICO O MATERIAL.

V.4.1 PUNTO LIBRE

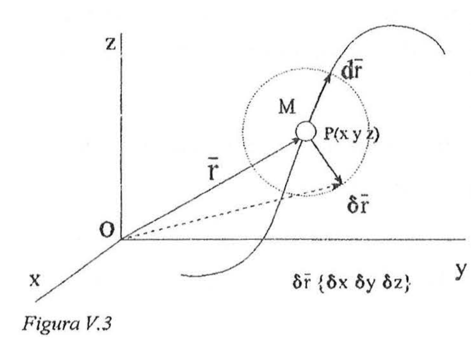


Figura V.3

Entenderemos que un Punto físico o material será libre cuando no esté sometido a ninguna coacción, es decir, cuando pueda moverse en cualquier dirección. Por tanto, como las posibilidades de movimiento de un punto en el espacio son tres, coincidentes con las coordenadas que definen su posición en un marco referencial, diremos que el punto libre tendrá ***3 grados de libertad***, expresables mediante 3 parámetros independientes o coordenadas libres equivalentes (λ, μ, ν) que en un marco o sistema de referencia cartesiano (x, y, z) se pondrán de manifiesto como $x=x(\lambda, \mu, \nu)$, $y=y(\lambda, \mu, \nu)$, $z=z(\lambda, \mu, \nu)$.

En consecuencia, podremos imaginar infinidad de desplazamientos virtuales para el punto libre en el entorno de un punto geométrico, de los cuales sólo uno podrá ser desplazamiento real ante una determinada solicitación.

V.4.2 PUNTO LIGADO A UNA SUPERFICIE

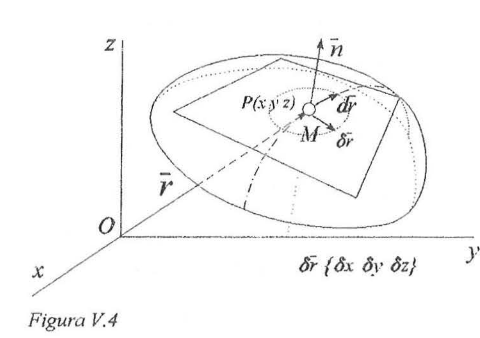


Figura V.4

Si un punto físico o material está obligado o limitado a moverse exclusivamente sobre una superficie, habrá siempre una dirección por la cual no se podrá mover: la normal a la superficie en cada punto geométrico que pueda ocupar.

Esta coacción equivale a la reducción de un grado de libertad, pudiendo aún moverse en cualquiera de las direcciones contenidas en el correspondiente plano tangente, expresable mediante una combinación de desplazamientos según dos direcciones ortogonales de referencia equivalentes a ***2 grados de libertad***.

Es decir, los parámetros libres serán en este caso dos, (λ, μ), y en un marco o sistema de referencia cartesiano $P(x, y, z)$ se pondrán de manifiesto como $x=x(\lambda, \mu)$, $y=y(\lambda, \mu)$, $z=z(\lambda, \mu)$ o bien, "independizando" dos coordenadas en la ecuación de la superficie de ligadura $\phi = \phi(x,y,z)$, quedará la tercera en función de las otras dos, por ejemplo $z = f(x,y)$.

Por ello, aunque el desplazamiento virtual que imaginemos podrá tener cualquier dirección, incluso saliendo del plano, al compatibilizarlo con la ecuación de enlace estaremos limitando a dos los grados de libertad, mientras que de entre todos ellos sólo uno podrá ser un desplazamiento real.

Se comprende ahora que el desplazamiento (real o virtual) haya de ser *diferencial* como habíamos indicado, ya que de no serlo no se podría admitir que el punto siguiera en la superficie una vez producida la variación de posición.

V.4.3 PUNTO LIGADO A UNA LÍNEA

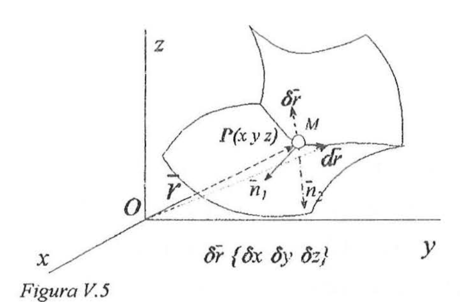


Figura V.5

Si el punto físico o material está obligado a mantenerse siempre en una línea, como podemos expresarla como intersección de dos superficies $\phi = \phi(x,y,z)$ y $\varphi = \varphi(x,y,z)$, se entenderá que no puede abandonar ninguna de las dos, es decir, no podrá desplazarse en ninguna de las direcciones contenidas en el plano normal común para cada punto de la línea de intersección, lo que equivale a perder una nueva posibilidad de movimiento respecto al caso anterior y reducir a ***uno*** su ***grado de libertad***.

En consecuencia, quedará un único parámetro independiente λ para definir la posición del punto físico o material, expresables mediante cartesianas en la forma: $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, $z = z(\lambda)$ o bien, independizando una sola coordenada, por ej. la x: $y = y(x)$, $z = z(x)$.

Como en el caso anterior, los desplazamientos habrán de ser diferenciales para admitir que el punto se mantiene en la línea después de variar su posición y, del mismo modo, al compatibilizar cualquier desplazamiento virtual con las ecuaciones de enlace, éste se confundirá con el único posible desplazamiento real en la dirección tangente a la línea en cada punto de los que puede ocupar.

V.4.4 PUNTO FIJO

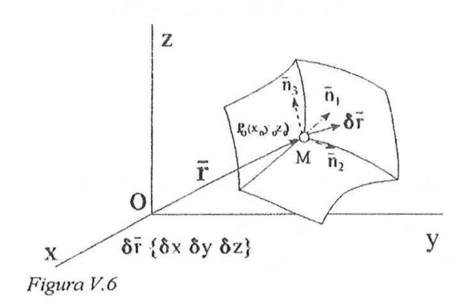


Figura V.6

Finalmente, si el punto físico o material está obligado a permanecer sobre un único punto geométrico $P_o(x_o, y_o, z_o)$, se interpretará como la pérdida del último grado de libertad que le quedaba y del último parámetro o coordenada libre que definía su posición, limitada ahora a tres valores fijos: $x = x_o$, $y = y_o$, $z = z_o$ que equivalen a la imposibilidad de desplazamiento real: $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$ por lo que se anulará igualmente cualquier desplazamiento virtual compatible con los enlaces y será, por tanto, expresión directa de equilibrio del punto material.

Resumiendo, para un punto libre la expresión de su vector de posición será una función vectorial de tres parámetros independientes o coordenadas libres $\vec{r} = \vec{r}(\lambda, \mu, \nu)$; si el punto está obligado a moverse sobre una superficie será función de dos $\vec{r} = \vec{r}(\lambda, \mu)$; si está ligado a una línea dependerá de un solo parámetro $\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$ y si está ligado a un punto geométrico fijo su expresión $\vec{r} = \vec{r}_o$ no variará.

Como consecuencia podremos decir también, a la inversa, que cuando un vector sea función de tres coordenadas libres o parámetros independientes, $\vec{r} = \vec{r}(\lambda, \mu, \nu)$, llevado al origen de referencia su extremo podrá moverse libremente por el espacio; si viene expresada en función de dos parámetros independientes $\vec{r} = \vec{r}(\lambda, \mu)$ su extremo describirá una superficie; si es función de un solo parámetro $\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$ describirá una línea mientras que si no depende de ningún parámetro $\vec{r} = \vec{r}_o$ por ser invariable, representará una sola posición.

Aunque para el estudio de campos encontraremos funciones dependientes de uno o más parámetros, el caso que nos va a interesar de modo particular será el de las funciones vectoriales dependientes de un solo parámetro, sobre todo en Cinemática donde será λ=t, por lo que nos limitaremos ahora a estudiar su variación.

V.5 FUNCIÓN VECTORIAL DE UN PARÁMETRO. DERIVADA Y DIFERENCIAL.

Las componentes cartesianas del vector, en función del parámetro independiente λ serán, supuesto su origen en el del sistema de referencia:

$$\vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\vec{i} + y(\lambda)\vec{j} + z(\lambda)\vec{k} \qquad (V.1)$$

donde para cada valor del parámetro entre $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, pasando por todos los intermedios, tendremos un único vector cuyo extremo describirá, como acabamos de demostrar, una línea continua si, como supondremos, son continuas las componentes del vector: x(λ), y(λ), z(λ), funciones escalares dependientes a su vez del parámetro λ, por lo que aplicaremos para las funciones vectoriales el mismo concepto de límite y continuidad en que se basa una función escalar, por el que:

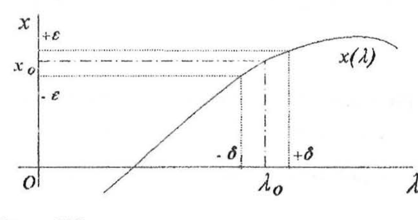


Figura V.7

"se dice que una función x(λ) tiende al límite x_o para un cierto valor de la variable independiente λ tendiendo a λ_o cuando, fijado un entorno de x_o (+ε, -ε), todos los valores de x, para valores de λ contenidos en el entorno ±δ de λ_o, se encuentran en él"

y *"una función escalar es continua en un entorno dado cuando tiene límite en dicho entorno y además cumple que $x = x_o$ si $\lambda = \lambda_o$".*

Estudiando, por tanto, las tres funciones escalares de la función vectorial para un cierto valor de $\lambda \to \lambda_o$, tal que $|\lambda - \lambda_o| < \delta$:

$$x \to xo \qquad y \to yo \qquad z \to zo$$

$$|x - x_o| < \varepsilon \qquad |y - y_o| < \varepsilon \qquad |z - z_o| < \varepsilon$$

de forma que: $|\vec{r} - \vec{r}_o| < \vec{\varepsilon}$ cuando $\vec{r} \to \vec{r}_o$, pudiéndose escribir que una función vectorial será continua para $\lambda = \lambda_o$ cuando tome el valor de su límite; es decir: $\vec{r}(\lambda_o) = \vec{r}_o$.

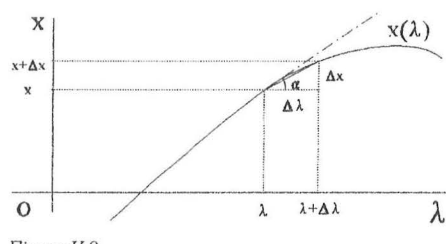


Figura V.8

Y por analogía, nuevamente, con las derivadas de funciones escalares (uniformes y continuas), expresables en el límite, cuando $\Delta\lambda \to 0$, como la relación entre incremento de función e incremento de variable, que se identifica con la tangente a la curva en el punto considerado:

$$\frac{dx(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{x(\lambda + \Delta\lambda) - x(\lambda)}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta\lambda} = tg\,\alpha \qquad (V.2)$$

Figura V.9

expresaremos la derivación de una función vectorial como:

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\vec{r}(\lambda + \Delta\lambda) - \vec{r}(\lambda)}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\vec{r} + \Delta\vec{r} - \vec{r}}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\lambda} = T\vec{\tau} \qquad (V.3)$$

que será un vector tangente a la curva asociada a la función vectorial y que, por obtenerse de dividir cantidades infinitésimas, tendrá un valor finito, a diferencia del vector diferencial $d\vec{r}$ que podremos expresar como el vector derivada por el diferencial $d\lambda$.

Las componentes cartesianas de la derivada de un vector se obtendrán asimismo derivando las componentes del vector, como se deduce de:

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\vec{r}(\lambda + \Delta\lambda) - \vec{r}(\lambda)}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{[x(\lambda+\Delta\lambda)\vec{i} + y(\lambda+\Delta\lambda)\vec{j} + z(\lambda+\Delta\lambda)\vec{k}] - [x(\lambda)\vec{i} + y(\lambda)\vec{j} + z(\lambda)\vec{k}]}{\Delta\lambda} =$$

$$= \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{x(\lambda+\Delta\lambda) - x(\lambda)}{\Delta\lambda}\vec{i} + \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{y(\lambda+\Delta\lambda) - y(\lambda)}{\Delta\lambda}\vec{j} + \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{z(\lambda+\Delta\lambda) - z(\lambda)}{\Delta\lambda}\vec{k} = \qquad (V.4)$$

$$= \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta x(\lambda)}{\Delta\lambda}\vec{i} + \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta y(\lambda)}{\Delta\lambda}\vec{j} + \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta z(\lambda)}{\Delta\lambda}\vec{k} = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}\vec{i} + \frac{dy(\lambda)}{d\lambda}\vec{j} + \frac{dz(\lambda)}{d\lambda}\vec{k}$$

obteniéndose un nuevo vector cuyas componentes serán, a su vez, funciones del parámetro λ (si no acaban anulándose):

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}\vec{i} + \frac{dy(\lambda)}{d\lambda}\vec{j} + \frac{dz(\lambda)}{d\lambda}\vec{k} = v_x(\lambda)\vec{i} + v_y(\lambda)\vec{j} + v_z(\lambda)\vec{k} = \vec{v}(\lambda) \qquad (V.5)$$

que estará ligado al extremo del vector original, aunque, por el hecho de ser una nueva función vectorial dependiente de un solo parámetro, si llevamos todos los vectores derivada a un origen común, su extremo describirá una nueva línea que en cinemática tendrá un significado especial.

De forma análoga se definirá la derivada segunda de un vector si la consideramos como la derivada del vector obtenido en la (V.5):

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} = \frac{dv_x(\lambda)}{d\lambda}\vec{i} + \frac{dv_y(\lambda)}{d\lambda}\vec{j} + \frac{dv_z(\lambda)}{d\lambda}\vec{k} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx(\lambda)}{d\lambda}\right)\vec{i} + \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dy(\lambda)}{d\lambda}\right)\vec{j} + \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dz(\lambda)}{d\lambda}\right)\vec{k} = \frac{d^2x(\lambda)}{d\lambda^2}\vec{i} + \frac{d^2y(\lambda)}{d\lambda^2}\vec{j} + \frac{d^2z(\lambda)}{d\lambda^2}\vec{k}$$

por lo que podemos generalizar la derivación a toda función paramétrica vectorial: $\vec{V}(\lambda) = V_x(\lambda)\vec{i} + V_y(\lambda)\vec{j} + V_z(\lambda)\vec{k}$

$$\frac{d\,\vec{v}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d\,v_x(\lambda)}{d\lambda}\vec{i} + \frac{d\,v_y(\lambda)}{d\lambda}\vec{j} + \frac{d\,v_z(\lambda)}{d\lambda}\vec{k}$$

$$\frac{d^2\vec{v}(\lambda)}{d\lambda^2} = \frac{d^2v_x(\lambda)}{d\lambda^2}\vec{i} + \frac{d^2v_y(\lambda)}{d\lambda^2}\vec{j} + \frac{d^2v_z(\lambda)}{d\lambda^2}\vec{k} \qquad (V.6)$$

$$\frac{d^3\vec{v}(\lambda)}{d\lambda^3} = \frac{d^3v_x(\lambda)}{d\lambda^3}\vec{i} + \frac{d^3v_y(\lambda)}{d\lambda^3}\vec{j} + \frac{d^3v_z(\lambda)}{d\lambda^3}\vec{k}$$

y si lo que se tiene no son las componentes del vector expresadas directamente en forma paramétrica sino en función de las coordenadas cartesianas $\vec{v} = \vec{v}(x,\ y,\ z) = v_x(x,\ y,\ z)\vec{i} + v_y(x,\ y,\ z)\vec{j} + v_z(x,\ y,\ z)\vec{k}$, sabiendo que $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, $z = z(\lambda)$, son funciones escalares dependientes del parámetro λ, aunque no sean conocidas, podremos hacer uso de las derivadas parciales si, como suponemos, existen los límites correspondientes, de forma que:

$$dv_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v_x(x+\Delta x,\ y,\ z) - v_x(x,\ y,\ z)}{\Delta x} + \lim_{\Delta y\to 0}\frac{v_x(x,\ y+\Delta y,\ z) - v_x(x,\ y,\ z)}{\Delta y} + \lim_{\Delta z\to 0}\frac{v_x(x,\ y,\ z+\Delta z) - v_x(x,\ y,\ z)}{\Delta z} = \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz$$

$$dv_y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v_y(x+\Delta x,\ y,\ z) - v_y(x,\ y,\ z)}{\Delta x} + \lim_{\Delta y\to 0}\frac{v_y(x,\ y+\Delta y,\ z) - v_y(x,\ y,\ z)}{\Delta y} + \lim_{\Delta z\to 0}\frac{v_y(x,\ y,\ z+\Delta z) - v_y(x,\ y,\ z)}{\Delta z} = \frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz \qquad (V.7)$$

$$dv_z = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v_z(x+\Delta x,\ y,\ z) - v_z(x,\ y,\ z)}{\Delta x} + \lim_{\Delta y\to 0}\frac{v_z(x,\ y+\Delta y,\ z) - v_z(x,\ y,\ z)}{\Delta y} + \lim_{\Delta z\to 0}\frac{v_z(x,\ y,\ z+\Delta z) - v_z(x,\ y,\ z)}{\Delta z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}dx + \frac{\partial v_z}{\partial y}dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz$$

obteniéndose:

$$\frac{d\vec{v}}{d\lambda} = \frac{dv_x}{d\lambda}\vec{i} + \frac{dv_y}{d\lambda}\vec{j} + \frac{dv_z}{d\lambda}\vec{k} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{d\lambda}\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\frac{dz}{d\lambda}\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{dz}{d\lambda}\right]\vec{k} =$$

$$= \left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\vec{k}\right]\frac{dx}{d\lambda} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\vec{k}\right]\frac{dy}{d\lambda} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\vec{k}\right]\frac{dz}{d\lambda} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{d\lambda}$$

por lo que podemos expresar las derivadas parciales de una función vectorial de forma similar a las de una escalar:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\vec{v}(x+\Delta x,\ y,\ z) - \vec{v}(x,\ y,\ z)}{\Delta x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\vec{k}$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\vec{v}(x,\ y+\Delta y,\ z) - \vec{v}(x,\ y,\ z)}{\Delta y} = \frac{\partial v_x}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\vec{k} \qquad (V.8)$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\vec{v}(x,\ y,\ z+\Delta z) - \vec{v}(x,\ y,\ z)}{\Delta z} = \frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\vec{k}$$

Siguiendo un proceso análogo para la obtención de las derivadas segundas, aparecen además las derivadas cruzadas en las que obviamente no importará el orden de derivación ya que no influye en la de una función escalar, por lo que los términos de las componentes del nuevo vector serán:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} = \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial y\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} = \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial z\partial y} \qquad (V.9)$$

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \qquad \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial z\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x\partial z}$$

V.6 COMPONENTES DE LA DERIVADA DE UN VECTOR

Si el vector $\vec v$ lo expresamos en la forma $\vec v = v(\lambda)\,\vec u(\lambda)$, donde $\vec u(\lambda)$ es el unitario en la dirección del vector para cada valor del parámetro, su derivada será:

$$\frac{d\vec v}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{(v+\Delta v)(\vec u+\Delta\vec u)-v\,\vec u}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{v\,\vec u+\Delta v\,\vec u+v\,\Delta\vec u+\Delta v\,\Delta\vec u-v\,\vec u}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta v\,\vec u+v\,\Delta\vec u+\Delta v\,\Delta\vec u}{\Delta\lambda} \qquad (V.10)$$

y despreciando infinitésimos de segundo orden, tendremos:

$$\frac{d\vec v}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\frac{\Delta v}{\Delta\lambda}\vec u + v\,\frac{\Delta\vec u}{\Delta\lambda}\right] = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\frac{\Delta v}{\Delta\lambda}\right]\vec u + v\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\frac{\Delta\vec u}{\Delta\lambda}\right] = \frac{dv}{d\lambda}\vec u + v\,\frac{d\vec u}{d\lambda} \qquad (V.11)$$

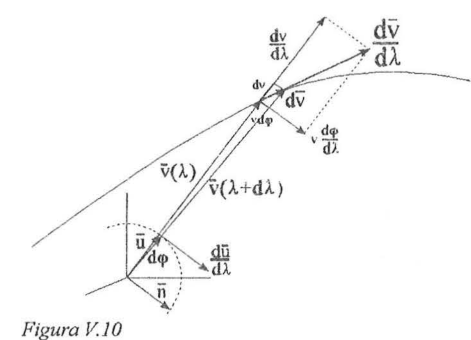


Figura V.10

El primer sumando del último miembro tiene la dirección de $\vec v$ y puede denominarse "***componente longitudinal***" de la derivada de $\vec v$. El segundo sumando tiene dirección perpendicular a $\vec v$ ya que, siendo $\vec u$ un vector unitario, su extremo se encontrará en una superficie esférica y su derivada, al ser tangente a dicha superficie, será normal a $\vec u$ y, por tanto, a $\vec v$; puede denominarse "***componente transversal***" de la derivada de $\vec v$:

$$\frac{d\vec v}{d\lambda} = \frac{dv}{d\lambda}\vec u + v\,\frac{d\varphi}{d\lambda}\vec n \qquad (V.12)$$

De ahí que el producto escalar de un vector $\vec v$ por su derivada $\frac{d\vec v}{d\lambda}$ se pueda expresar como el producto del módulo del vector v por la derivada del módulo $\frac{dv}{d\lambda}$, distinto en general del módulo de la derivada $\left|\frac{d\vec v}{d\lambda}\right| = \frac{|d\vec v|}{d\lambda} \neq \frac{dv}{d\lambda}$:

$$\vec v\cdot\frac{d\vec v}{d\lambda} = v\,\vec u\cdot\frac{dv}{d\lambda}\vec u + v\,\vec u\cdot v\,\frac{d\varphi}{d\lambda}\vec n = v\cdot\frac{dv}{d\lambda} \qquad (V.13)$$

En consecuencia, si el módulo de $\vec v$ permanece constante $\frac{dv}{d\lambda}=0$ y $\vec v\cdot\frac{d\vec v}{d\lambda}=0$, por lo que el vector y su derivada serán ortogonales entre sí. En efecto, como la trayectoria del extremo del vector, supuesto el origen fijo, estará contenida en la superficie esférica de radio v, su derivada será tangente a la esfera y, por tanto, normal a $\vec v$.

V.7 DERIVACIÓN DE LAS OPERACIONES VECTORIALES

Mediante un razonamiento similar podemos deducir la derivada de las operaciones vectoriales básicas, obviando la suma y resta de vectores ya que el límite de una suma es la suma de límites y por tanto, si $\vec r(\lambda) = \vec v(\lambda) \pm \vec w(\lambda)$:

$$\frac{d\vec r}{d\lambda} = \frac{d\vec v}{d\lambda} \pm \frac{d\vec w}{d\lambda} \qquad (V.14)$$

- Para el *PRODUCTO ARITMÉTICO* de una función escalar $\varphi(\lambda)$, por una función vectorial $\vec v(\lambda)$ obtendremos:

$$\frac{d}{d\lambda}[\varphi(\lambda)\,\vec v(\lambda)] = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{(\varphi+\Delta\varphi)(\vec v+\Delta\vec v)-\varphi\,\vec v}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\varphi\,\vec v+\Delta\varphi\,\vec v+\varphi\,\Delta\vec v+\Delta\varphi\,\Delta\vec v-\varphi\,\vec v}{\Delta\lambda} =$$

$$= \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\varphi\,\vec v+\varphi\,\Delta\vec v+\Delta\varphi\,\Delta\vec v}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}\vec v + \lim_{\Delta\lambda\to 0}\varphi\,\frac{\Delta\vec v}{\Delta\lambda} + \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\varphi\,\Delta\vec v}{\Delta\lambda} =$$

y despreciando infinitésimos de orden superior podemos escribir:

$$\frac{d[\varphi(\lambda)\,\vec{v}(\lambda)]}{d\lambda} = \varphi(\lambda)\,\frac{d\vec{v}(\lambda)}{d\lambda} + \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\,\vec{v}(\lambda) \qquad (V.15)$$

o Para el *PRODUCTO ESCALAR* de dos funciones vectoriales $\vec{v}(\lambda)$ y $\vec{w}(\lambda)$, seguiremos el mismo criterio:

$$\frac{d}{d\lambda}[\vec{v}(\lambda)\cdot\vec{w}(\lambda)] = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{(\vec{v}+\Delta\vec{v})\cdot(\vec{w}+\Delta\vec{w})-\vec{v}\cdot\vec{w}}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}+\Delta\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\,\Delta\cdot\vec{w}+\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{w}-\vec{v}\cdot\vec{w}}{\Delta\lambda} =$$

$$= \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\Delta\vec{w}+\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{w}}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta\lambda}\cdot\vec{w} + \lim_{\Delta\lambda\to 0}\vec{v}\cdot\frac{\Delta\vec{w}}{\Delta\lambda} + \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{w}}{\Delta\lambda} =$$

resultando la expresión, al despreciar los infinitésimos de orden superior:

$$\frac{d[\vec{v}(\lambda)\cdot\vec{w}(\lambda)]}{d\lambda} = \frac{d\vec{v}(\lambda)}{d\lambda}\cdot\vec{w}(\lambda) + \vec{v}(\lambda)\cdot\frac{d\vec{w}(\lambda)}{d\lambda} \qquad (V.16)$$

o y análogamente para el *PRODUCTO VECTORIAL*:

$$\frac{d}{d\lambda}[\vec{v}(\lambda)\times\vec{w}(\lambda)] = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{(\vec{v}+\Delta\vec{v})\times(\vec{w}+\Delta\vec{w})-\vec{v}\times\vec{w}}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\vec{v}\times\vec{w}+\Delta\vec{v}\times\vec{w}+\vec{v}\,\Delta\times\vec{w}+\Delta\vec{v}\times\Delta\vec{w}-\vec{v}\times\vec{w}}{\Delta\lambda} =$$

$$= \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\vec{v}\times\vec{w}+\vec{v}\times\Delta\vec{w}+\Delta\vec{v}\times\Delta\vec{w}}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta\lambda}\times\vec{w} + \lim_{\Delta\lambda\to 0}\vec{v}\times\frac{\Delta\vec{w}}{\Delta\lambda} + \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\vec{v}\times\Delta\vec{w}}{\Delta\lambda} =$$

obtendremos finalmente:

$$\frac{d[\vec{v}(\lambda)\times\vec{w}(\lambda)]}{d\lambda} = \frac{d\vec{v}(\lambda)}{d\lambda}\times\vec{w}(\lambda) + \vec{v}(\lambda)\times\frac{d\vec{w}(\lambda)}{d\lambda} \qquad (V.17)$$

Por último admitiremos, sin más demostración, que se cumplen las mismas propiedades para la derivación parcial:

$$\frac{\partial[\varphi\,\vec{v}]}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\vec{v} + \varphi\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} \qquad \frac{\partial[\varphi\,\vec{v}]}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\vec{v} + \varphi\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} \qquad \frac{\partial[\varphi\,\vec{v}]}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\vec{v} + \varphi\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \qquad (V.18)$$

$$\frac{\partial[\vec{v}\cdot\vec{w}]}{\partial x} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{w}}{\partial x} \qquad \frac{\partial[\vec{v}\cdot\vec{w}]}{\partial y} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{w}}{\partial y} \qquad \frac{\partial[\vec{v}\cdot\vec{w}]}{\partial z} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{w}}{\partial z} \qquad (V.19)$$

$$\frac{\partial[\vec{v}\times\vec{w}]}{\partial x} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\times\vec{w} + \vec{v}\times\frac{\partial\vec{w}}{\partial x} \qquad \frac{\partial[\vec{v}\times\vec{w}]}{\partial y} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\times\vec{w} + \vec{v}\times\frac{\partial\vec{w}}{\partial y} \qquad \frac{\partial[\vec{v}\times\vec{w}]}{\partial z} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\times\vec{w} + \vec{v}\times\frac{\partial\vec{w}}{\partial z} \qquad (V.20)$$

y para las derivadas segundas, por ejemplo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\vec{v}\cdot\vec{w}) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\vec{v}\cdot\vec{w})\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{w}}{\partial y}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x\,\partial y}\cdot\vec{w} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\vec{w}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vec{w}}{\partial y} + \vec{v}\cdot\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial x\,\partial y} \qquad (V.21)$$

VI. CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

VI.1 MOVIMIENTO Y SISTEMA DE REFERENCIA

De entre todas las posibles variaciones de posición que como observadores podemos "imaginar" en el entorno de los puntos, al hablar de movimiento solo tendrá sentido una única variación de posición: la que un móvil determinado estará obligado a realizar en un intervalo de tiempo por efecto de las causas determinantes, aunque por el momento éstas no nos vayan a interesar o, para ser más exactos, no vayamos a investigar. Es decir, en primer lugar el *MOVIMIENTO* va a implicar un sujeto "***material***", aunque se puedan encontrar términos análogos a los que vamos a estudiar en otros entes de razón (como el calor, la luz o el sonido) para los que se utilizará más apropiadamente el término propagación; en segundo lugar un objeto material podrá "o no" cambiar de posición pero, de hacerlo, solo podrá hacerlo en modo "***real***" (no virtual) y en la medida que las causas agentes vayan a determinar; por último, el objeto material, por el hecho de serlo, solo podrá encontrarse para cada instante en una posición ya que no podrá encontrarse en dos a la vez, y esa dependencia del "***tiempo***" es lo que va a determinar precisamente el conocimiento de su posición $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Lamentablemente esta función vectorial no es lo que inicialmente se va a conocer sino que, por la relación causa-efecto, partiremos en general de la expresión $\vec{F} = m\vec{a}$ proporcionada por el 2° Principio de la Mecánica para un marco inercial, siendo nuestro objetivo ahora encontrar la relación entre la posición del punto definida por $\vec{r} = \vec{r}(t)$ y el agente que determina dicha posición a través de $\vec{a} = \vec{a}(t)$. En estos términos, la Cinemática es la parte de la Física que se ocupa de la descripción cuantitativa del movimiento de los cuerpos, desentendiéndose de las causas que lo puedan producir. Viene a ser, pues, una geometría (analítica o gráfica) en la que interviene además un parámetro ajeno a esa disciplina: el tiempo. Y como el movimiento solo podrá entenderse como un cambio de posición en el tiempo, para su estudio cuantitativo tendremos que definir, en principio arbitrariamente, el sistema o marco referencial respecto al cual nuestro móvil cambiará de posición, imaginando que los ejes de referencia se encuentran en reposo aunque no sea verdad. El resultado de nuestro estudio será, entonces, la descripción del movimiento del cuerpo respecto al sistema en cuestión; es decir, será un *movimiento relativo* a nuestro marco, independientemente de que luego comprobemos si está realmente en reposo o si se mueve respecto a otro realmente fijo que nos interese más, para lo que habremos de contar con el *movimiento de arrastre* de los puntos invariablemente unidos a los ejes de aquél.

Podría suponerse más conveniente utilizar para referencia unos ejes perfectamente inmóviles respecto a los cuales obtener directamente el *movimiento absoluto* pero ante la imposibilidad de determinar dicho sistema, de acuerdo con la teoría relativista, no deja de ser una ficción utilizada en Mecánica Clásica para algunos fines, de los que analizaremos más adelante su validez. En cualquier caso, dado que la Mecánica tratará del estudio del punto y de los sistemas (en reposo o en movimiento) iniciaremos el estudio con el más sencillo de los cuerpos que cabe considerar: el *punto cinemático*, que imaginaremos como una partícula de tan pequeñas dimensiones que su movimiento podrá ser descrito de un modo completo como una traslación, careciendo de sentido referirse a posibles rotaciones sobre sí mismo.

Para ello conviene recordar la diferenciación entre los conceptos de:

- **punto geométrico**, referido exclusivamente a la localización en un marco referencial y, por tanto, sin posibilidad de movimiento independiente de aquél.
- **punto físico**, entendido como ente físico o abstracción, no necesariamente material, que se va a desplazar o al menos lo va a parecer.
- **punto material**, entendido como partícula sin volumen pero con masa y dotado, por tanto, de una características que influirán en su movimiento.

VI.2 DEFINICIONES CINEMÁTICAS

Entendiendo que un punto material se mueve en un marco o sistema referencial cuando *cambia de posición* en el tiempo respecto a él, para tener completamente definido su movimiento tendremos que saber en todo instante cual es su vector de posición, o lo que es lo mismo, necesitaremos conocer la función vectorial $\vec{r}(t)$.

VI.2.1 TRAYECTORIA

Sin embargo no resulta el único modo de determinar el movimiento del punto material ya que al tratarse de una función dependiente de un solo parámetro, los extremos del vector de posición unicamente podrán describir una línea (plana o alabeada) cuyo lugar geométrico, denominado *TRAYECTORIA* del móvil, Γ, se obtendrá eliminando el parámetro tiempo de la ecuación vectorial y vendrá dada por la intersección de dos superficies ϕ_1 y ϕ_2.

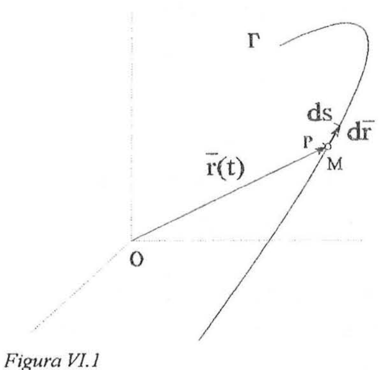


Figura VI.1

Ahora bien, desaparecido el parámetro cinemático se pierde la referencia al proceso en sí, ya que el dato geométrico no da idea de como la va a recorrer, ni en qué instante ocupará el móvil una determinada posición quedando exclusivamente una imagen atemporal. Por tanto, el conocimiento de la trayectoria no basta para definir el movimiento en su totalidad. Para ello necesitaremos conocer además, o poder determinar, la posición en cada instante del punto material, por ejemplo mediante una función s=s(t) (*ecuación o ley horaria*) que proporcione en cada instante el espacio recorrido o a partir del conocimiento de la "***rapidez***" con que la va a recorrer $\dot{s}(t)$ desde una posición inicial.

VI.2.2 VELOCIDAD

Cabría definir la velocidad media de un punto que recorre un espacio s en un tiempo t por el cociente s/t. Sin embargo, como el valor de la velocidad variará de un punto a otro, no resulta muy útil y se precisa definir el **módulo** de la velocidad instantánea como:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) \qquad (VI.1)$$

que, como indica el último miembro, se obtendrá sin más que derivar la ecuación horaria $s = s(t)$cuando se haya podido llegar a conocer. Sin embargo, como se comprenderá fácilmente, la velocidad es una magnitud vectorial que va a indicar la dirección del movimiento y no quedará definida por el conocimiento único de su valor (rapidez).

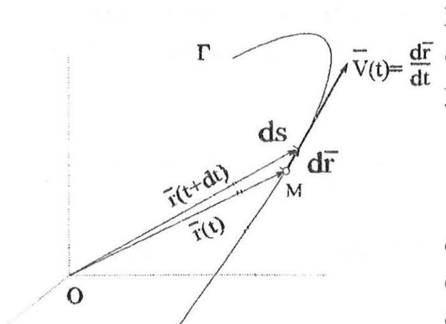


Figura VI.2

En la fig.*VI.2* se observa que el módulo del vector $\Delta\vec{r}$ tiende a coincidir con Δs en el límite en que ambos se aproximan a cero, ya que son cuerda y arco respectivamente de la trayectoria Γ. Por tanto el vector:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (VI.2)$$

de módulo finito y la misma dirección que $d\vec{r}$ ya que se obtiene al dividir este vector por un escalar del mismo orden infinitésimo que él, nos define de un modo completo la velocidad instantánea del punto material que, naturalmente, está dirigida según la tangente a la trayectoria y será un vector ligado a él.

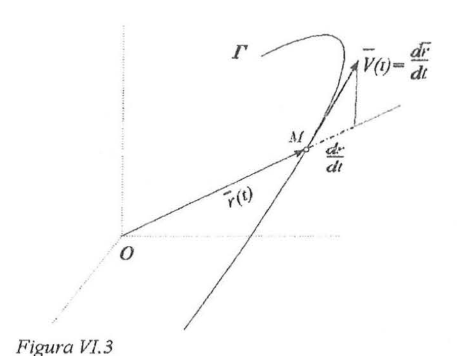


Figura VI.3

Es de notar que el módulo de la velocidad (o rapidez) es, por definición de velocidad (vector), el módulo de la derivada del vector de posición, pero no tiene por qué coincidir, en general, con la derivada del módulo del vector de posición: $v = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} \neq \frac{dr}{dt}$, cumpliéndose la propiedad ya vista en el tema anterior:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{dr}{dt} \neq r\, v$$

por la cual el producto escalar de un vector por su derivada es igual al módulo del vector por la proyección de la derivada sobre él.

VI.2.3 HODÓGRAFA

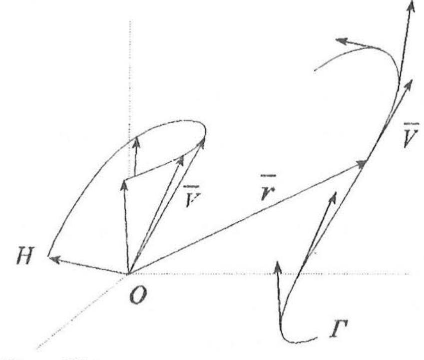


Figura VI.4

Asimismo, como la velocidad resulta una nueva función vectorial dependiente de un solo parámetro, $\vec{v} = \vec{v}(t)$, si en lugar de considerarla aplicada en el punto al que está ligada en cada instante por el vector $\vec{r} = \vec{r}(t)$se considerase aplicada siempre en un mismo punto, por ejemplo O, su extremo describiría otra línea diferente a la descrita por el vector de posición. El lugar geométrico de los extremos de los vectores equipolentes a los vectores velocidad del móvil para cada punto de la trayectoria, cuando todos ellos tienen un origen común, se denomina Hodógrafa del movimiento y proporciona la condición cinemática que la trayectoria por sí sola no podía aportar.

Aunque la expresión analítica de la hodógrafa se obtendrá eliminando el parámetro t, no perderá la característica cinemática como ocurría con la trayectoria, ya que la distancia de cualquiera de sus puntos al origen de referencia indicará el módulo del vector velocidad en un instante determinado y la línea que los une proporcionará su dirección. Sin embargo, por sí sola tampoco definirá totalmente el movimiento ya que se necesitará una referencia geométrica que indique la localización precisa del punto material. Su justificación radica en la cte. de integración de $\vec{r} = \int \vec{v}(t)\, dt + \vec{r}_0$ que, de no ser conocida, nos dará toda la familia de trayectorias posibles (paralelas) para el punto material.

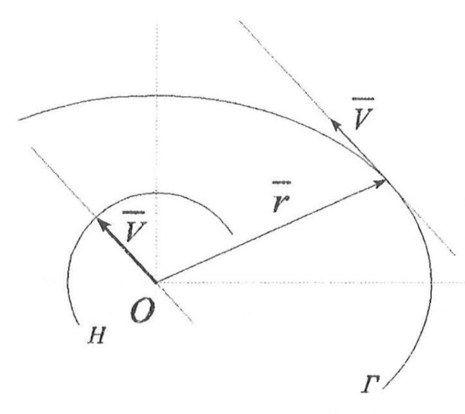


Figura VI.5

Solamente con el conocimiento conjunto de ambas se podría determinar la localización del móvil en todo instante y su velocidad, trazando por ejemplo, a partir de O, la paralela a la tangente a un punto de la trayectoria hasta cortar a la hodógrafa o viceversa si lo que buscamos es el punto de la trayectoria que tiene una determinada velocidad.

Esto representa una alternativa al conocimiento de la función $\vec{r} = \vec{r}(t)$ que se denomina ***INDICATRIZ*** del movimiento, entendiendo por indicatriz una forma geométrica más o menos sencilla (de la que veremos otro ejemplo en la cuádrica tensorial) que permite conocer, mediante una construcción gráfica directa otra magnitud. Sin embargo su utilidad se limita, por razones obvias, al movimiento en un plano, ya que difícilmente se podría medir en el espacio el valor de la velocidad.

En cualquier caso, como todo lo que sale por geometría tiene su equivalente analítico podemos afirmar que el movimiento del punto quedará totalmente determinado conociendo su indicatriz. Pero aún nos puede dar una información adicional si tratamos de averiguar "la velocidad de la velocidad" ya que, por analogía, se tratará de un vector tangente a la hodógrafa que nos indicará el cambio de dirección del vector velocidad y que definiremos como vector aceleración.

VI.2.4 ACELERACIÓN

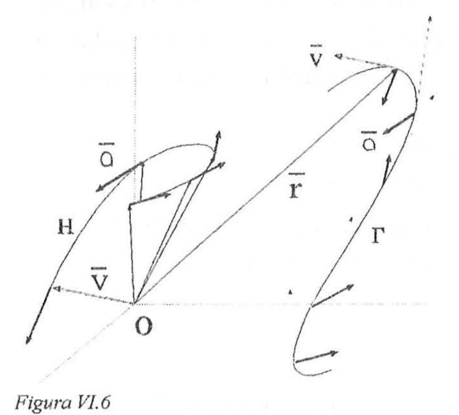


Figura VI.6

En efecto, se considera la aceleración como la variación de la velocidad en la unidad de tiempo, pero dado que ésta es una magnitud vectorial, su variación puede afectar también a la dirección, definiéndose infinitesimalmente la aceleración instantánea como la derivada del vector velocidad, función del tiempo, respecto a este parámetro:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (VI.3)$$

y que, por la propia definición de derivada de un vector, tendrá la dirección de $\Delta\vec{v}$ cuando $\Delta t \to 0$ justificándose, en el límite, su tangencia a la hodógrafa para cada valor de t.

Al igual que la velocidad, la aceleración es un vector ligado en todo instante al punto material y de una observación inmediata de la figura VI.6 se puede deducir que en todo instante irá dirigido hacia la parte cóncava de la trayectoria, hacia el centro de curvatura que veremos al definir las componentes intrínsecas de la aceleración.

Una vez alcanzada la expresión de la aceleración de un punto material tendremos resuelto el problema de relacionar su movimiento con las fuerzas que lo van a originar al actuar sobre él, $\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ pero hay que tener en cuenta que el conocimiento de $\vec{a}$ exclusivamente no define el movimiento del punto en su totalidad ya que para obtener la velocidad $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,dt + \vec{v}_0$ se necesita conocer algún dato que nos permita despejar la constante de integración, como por ejemplo la velocidad en el instante inicial, del mismo modo que se necesita conocer su posición en dicho instante para determinar la trayectoria que realmente va a seguir.

Por otro lado, la dificultad de su resolución puede radicar no tanto en el problema en sí como en el sistema de referencia elegido para trabajar, ya que no siempre resultará adecuado utilizar exclusivamente coordenadas cartesianas o recurrir a polares, definidas en base a un origen o polo fijo, sino que merezca la pena conocer también las componentes intrínsecas de la aceleración que referiremos al propio punto material.

VI.3 COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN

De la definición de vector aceleración como límite del vector diferencia de la velocidad para dos valores infinitamente próximos del parámetro t, $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ hemos deducido que ha de tener la misma dirección que el vector $\Delta\vec{v}$ cuando $\Delta t \to 0$, lo que equivale a decir que ha de encontrarse en el plano que contiene a los dos vectores velocidad tangentes a la curva en dos puntos contiguos, o dicho de otro modo, en el plano que contiene tres puntos contiguos de la trayectoria, que es asimismo el denominado *plano osculador*.

Recordando, por tanto, el triedro de Frenet, formado por las direcciones denominadas *TANGENTE*, *NORMAL PRINCIPAL* y *BINORMAL* a una curva, ortogonales entre sí y determinadas por la intersección de los planos Osculador, Normal y Rectificante en cada punto de la trayectoria, podremos expresar el vector aceleración de un modo directo y general, exclusivamente mediante dos componentes ortogonales, una dirigida según la velocidad, que se denomina ***componente tangencial***, por tener, naturalmente, la dirección de la tangente, y otra según la normal a la curva o ***componente normal***, ya que por estar contenido en el plano osculador, no tendrá nunca componente según la binormal.

En efecto, denominando $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ y $\vec{\beta}$ a los unitarios según las direcciones definidas por los tres ejes, el vector velocidad solo podrá expresarse por su única componente según la tangente a la curva $\vec{v} = v\,\vec{\tau}$. Derivando respecto al tiempo, teniendo en cuenta que v=v(t) y que $\vec{\tau}$, aunque es invariable en módulo por ser un unitario, en general cambiará de dirección, podremos escribir:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\,\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\vec{\tau} + v\,\frac{d(\vec{\tau})}{dt} \qquad (VI.4)$$

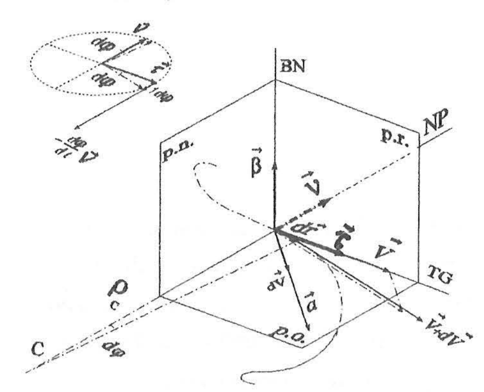


Figura VI.7

donde se pone de manifiesto analíticamente la existencia de una componente de la aceleración según la dirección *TANGENTE* a la trayectoria $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$ y otra definida por la derivada del unitario $\vec{\tau}$: $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ cuyo extremo, como podemos observar en la *fig.VI.7*, solo puede describir un elemento diferencial de circunferencia, con una velocidad tangente a su trayectoria y contenida, por tanto, en el plano osculador, por lo que ha de tener la dirección de la *NORMAL* principal $\vec{\nu}$, sentido hacia el centro de curvatura y módulo:

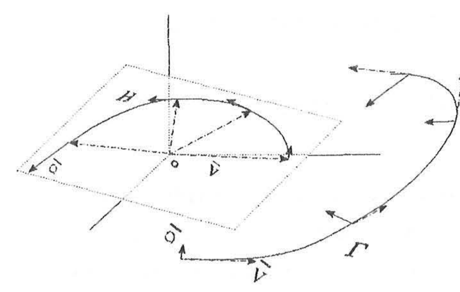
$$\frac{ds_o}{dt} = \frac{1\,d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (VI.5)$$

expresable, a su vez, en función del elemento diferencial de arco de la trayectoria del punto $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho_c}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho_c}$ ya que, trazando las normales principales en los dos puntos contiguos que definen ese elemento de arco, ambas formarán el mismo ángulo elemental $d\varphi$ (ángulo de contingencia) al cortarse en el centro de la circunferencia capaz que denominamos *CENTRO DE CURVATURA*, verificándose $\rho_C\,d\varphi = ds$, donde ρ_C es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto considerado.

El módulo de la segunda componente quedará por tanto en la forma: $a_\nu = -\frac{v^2}{\rho_c}$ y estará siempre dirigida según la normal principal hacia el centro de curvatura, por lo que se denominará ***componente normal,*** siendo ***la responsable del cambio de dirección*** en la trayectoria mientras que la ***componente tangencial*** lo será de ***la mayor o menor rapidez*** con que el móvil la vaya a recorrer y la expresión resultante del vector aceleración en sus componentes intrínsecas quedará:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\,\vec{\tau} - v\,\frac{v}{\rho}\,\vec{\nu} = \dot{v}\,\vec{\tau} - \frac{v^2}{\rho}\,\vec{\nu} \qquad (VI.6)$$

Mediante un sencillo razonamiento se deduce que la componente normal a_ν será mínima cuando $\rho_C \to \infty$, es decir para una trayectoria rectilínea en la que $a_\nu = \frac{v^2}{\infty} = 0$, por lo que el movimiento sobre una trayectoria curvilínea siempre tendrá aceleración dado que $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2}$, aunque se trate de un movimiento uniforme en el que $v = cte$ y, en consecuencia, $a_\tau = \dot{v} = 0$. Para el movimiento de una partícula material "sin volumen" lo que no tendrá sentido será decir que la componente normal será máxima cuando $\rho_C \to 0$ puesto que eso implicaría una rotación del punto sobre sí mismo, no siendo muy aceptable como solución. Diremos más apropiadamente que la componente normal será máxima cuando la tangencial sea mínima, es decir, cuando $a_\tau = \dot{v} = 0$ y por tanto $v = cte$, en cuyo caso, si además $a = cte$, también lo será a_ν y ρ_C, encontrándonos ante un movimiento uniforme circular.


Figura VI.8

En el caso de una curva plana, el plano de la curva es asimismo el plano osculador y, por tanto, el vector aceleración no tiene nunca componente según la normal al plano, correspondiente en todo instante a la binormal. Aunque esto es de buen sentido físico-matemático, puede comprobarse esta circunstancia mediante consideraciones sobre la hodógrafa, que será también una curva contenida en un plano paralelo al de la trayectoria, en el que se encontrará además el origen de reducción ya que los vectores velocidad han de ser coplanarios con los vectores aceleración. La figura *VI.8* aclara mejor esta propiedad que cualquier razonamiento verbal.

Las componentes intrínsecas de la aceleración son en definitiva las más significativas del movimiento ya que éste dependerá no solo de lo rápido que vaya el móvil y de cómo variará esa rapidez, sino también, en igual medida, de la variación en la dirección. Sin embargo, la proyección del movimiento sobre unos ejes cartesianos o sobre ejes polares no tendrá la misma connotación, pero su utilidad se pondrá de manifiesto en otros aspectos, como veremos a continuación.

VI.4 EXPRESIONES CARTESIANAS DEL MOVIMIENTO

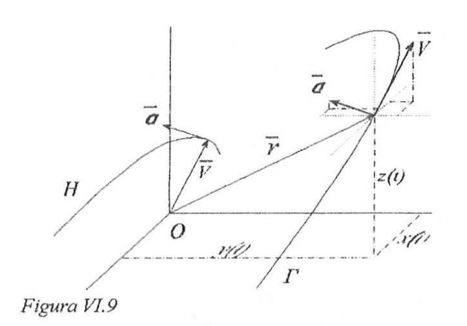


Figura VI.9

Utilizando notación cartesiana se tendrá definido el movimiento cuando conozcamos la función vectorial paramétrica $\vec{r} = \vec{r}(t)$ de posición del punto material, cuyas componentes $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ serán al mismo tiempo, como ya hemos visto, las *ECUACIONES PARAMÉTRICAS* (horarias) del movimiento y las ecuaciones explícitas de la *TRAYECTORIA*:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \qquad (VI.7)$$

ya que proporcionan las coordenadas del punto para cada instante t. Por tanto, eliminando el parámetro, obtendremos el lugar geométrico de los extremos del vector de posición del punto, expresable mediante las ecuaciones de dos superficies cuya intersección nos da la línea en cuestión:

$$\Gamma \left| \begin{aligned} \varphi(x,y,z) &= 0 \\ \psi(x,y,z) &= 0 \end{aligned} \right| \qquad (VI.8)$$

si bien el conocimiento de la posición en cada instante del punto sobre ella ha de conseguirse mediante una expresión adicional que proporcione el espacio recorrido a partir de un origen dado; es decir, mediante una función $s = s(t)$ (ley *horaria*) ya que al eliminar el parámetro de las *(VI.7)* se ha perdido toda referencia cinemática, quedando exclusivamente como referencia geométrica.

La *VELOCIDAD* o rapidez con que el móvil recorrerá la trayectoria se obtendrá derivando dicha función respecto del tiempo $v(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$ distinto, en general, de la derivada del módulo del vector de posición $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ como se verá más claramente en las expresiones polares. Sin embargo, $v(t)$ sí será el módulo del vector $\vec{v} = \vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \qquad (VI.9)$$

que define la velocidad instantánea del punto dirigida, como ya hemos visto, según la tangente a la trayectoria. Por tanto:

$$v(t) = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}{dt} = \frac{|d\vec{r}|}{dt} \neq \frac{|dr|}{dt} \qquad (VI.10)$$

Por otro lado, las ecuaciones paramétricas de $\vec{v} = \vec{v}(t)$ serán a su vez las ecuaciones explícitas de la *HODÓGRAFA* pero, a diferencia de las *(VI.7)*, éstas solas no bastan para definir totalmente el movimiento ya que se necesita conocer al menos un punto de la trayectoria en un instante determinado para determinar las constantes de integración:

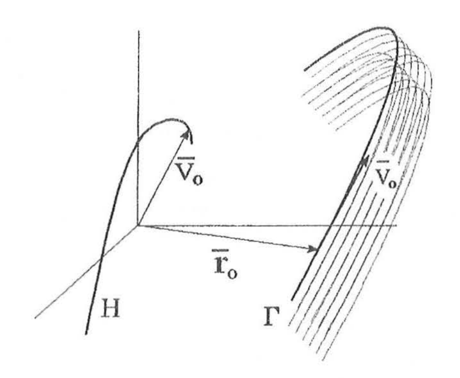


Figura VI.10

$$\begin{matrix} \dot{x} = \dot{x}(t) \\ \dot{y} = \dot{y}(t) \\ \dot{z} = \dot{z}(t) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \textit{integrando} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = \int \dot{x}(t)\,dt + x_o \\ y = \int \dot{y}(t)\,dt + y_o \\ z = \int \dot{z}(t)\,dt + z_o \end{matrix} \qquad (VI.11)$$

ya que el desconocimiento de estas constantes nos daría, en definitiva, toda la trayectorias paralelas posibles en el espacio. De cualquier modo, eliminando el parámetro t en las ecuaciones explícitas se obtienen las ecuaciones implícitas de la hodógrafa:

$$\begin{matrix} \dot{x} = \dot{x}(t) \\ \dot{y} = \dot{y}(t) \\ \dot{z} = \dot{z}(t) \end{matrix} \quad \textit{y eliminando } t \Rightarrow \quad H \left| \begin{matrix} \phi(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = 0 \\ \Psi(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = 0 \end{matrix} \right| \qquad (VI.12)$$

que junto con las de la Trayectoria proporcionan la indicatriz del movimiento, de gran utilidad en el movimiento plano:

$$\Gamma \left| \begin{matrix} \varphi(x,y,z) = 0 \\ \psi(x,y,z) = 0 \end{matrix} \right| \qquad H \left| \begin{matrix} \phi(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = 0 \\ \Psi(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = 0 \end{matrix} \right| \qquad (VI.13)$$

La expresión de la aceleración, por último, será por definición la derivada del vector velocidad y, por tanto, la derivada segunda del vector de posición:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} \qquad (VI.14)$$

siendo $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ las segundas derivadas de las funciones x(t), y(t), z(t) respecto de t, por lo que resulta obvio que su conocimiento solo no basta para definir el movimiento ya que se necesita conocer además la velocidad y posición del punto en un instante particular para determinar las constantes de integración cuyo desconocimiento nos daría, en definitiva, toda la *familia* de trayectorias posibles que, en el estudio de fluidos, se conocerán como líneas de corriente (o "líneas de vector" que veremos en campos):

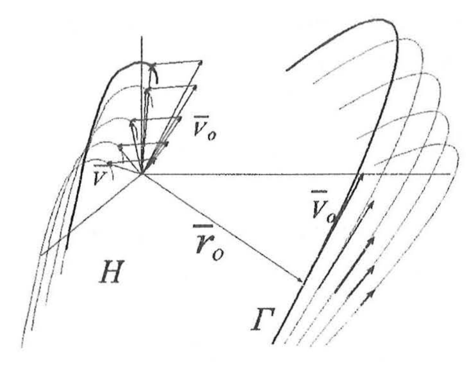


Figura VI.11

$$\begin{matrix} \ddot{x} = \ddot{x}(t) \\ \ddot{y} = \ddot{y}(t) \\ \ddot{z} = \ddot{z}(t) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \textit{integrando} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \dot{x} = \dot{x}(t) + \dot{x}_o \\ \dot{y} = \dot{y}(t) + \dot{y}_o \\ \dot{z} = \dot{z}(t) + \dot{z}_o \end{matrix} \qquad (VI.15)$$

e integrando nuevamente:

$$\begin{matrix} x = \int \dot{x}(t)\,dt + \dot{x}_o t + x_o \\ y = \int \dot{y}(t)\,dt + \dot{y}_o t + y_o \\ z = \int \dot{z}(t)\,dt + \dot{z}_o t + z_o \end{matrix} \qquad (VI.16)$$

VI.5 EXPRESIONES EN COORDENADAS POLARES

En el movimiento espacial, tratándose de trayectorias alabeadas, en lugar de coordenadas cartesianas, se pueden utilizar otras que respondan más adecuadamente a cada caso particular; por ejemplo, en esféricas tendríamos definido el movimiento de un punto material por el conocimiento de $\rho = \rho(t)$ $\varphi = \varphi(t)$ y $\psi = \psi(t)$, siendo ρ la proyección del radio vector sobre el plano oxy; φ el ángulo que forma dicha proyección con el eje ox y ψ el ángulo que forma el radio vector con el eje oz, de forma que:

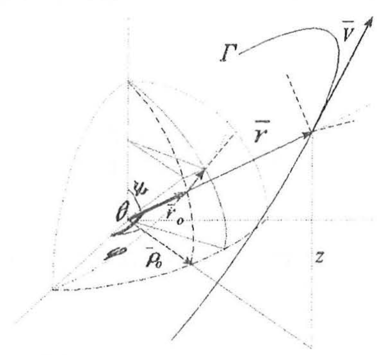


Figura VI.12

$$\begin{matrix} \rho = \rho(t) \\ \varphi = \varphi(t) \\ \psi = \psi(t) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = \rho\, sen\,\psi \cos\varphi \\ y = \rho\, sen\,\psi\, sen\,\varphi \\ z = \rho \cos\psi \end{matrix} \qquad (VI.17)$$

mientras que en cilíndricas utilizaríamos $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $z = z(t)$, que se podrían relacionar con las cartesianas en la forma:

$$\begin{matrix} \rho = \rho(t) \\ \varphi = \varphi(t) \\ z = z(t) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho\, sen\,\varphi \\ z = z \end{matrix} \qquad (VI.18)$$

Sin embargo no resultan siempre útiles a la hora de derivar para encontrar unas componentes de la velocidad y la aceleración que tengan una significación especial. Por el contrario, la utilización de coordenadas polares, en función de la distancia $r = r(t)$ del móvil a un punto fijo O denominado *POLO* y del ángulo $\theta = \theta(t)$ que forma el radio vector en cada instante con una dirección fija denominada *EJE POLAR* van a tener una utilidad especial, sobre todo en el estudio de campos centrales, en los que la aceleración va a tener constantemente la dirección del radio vector.

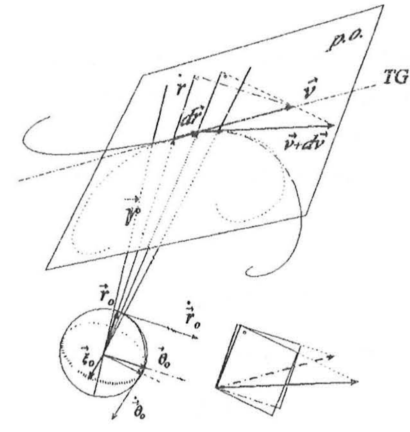


Figura VI.13

Pero es en particular para los problemas de movimiento plano donde va a ser de más utilidad ya que el vector posición, expresable en función de un unitario en su misma dirección y, por tanto variable en el tiempo: $\vec{r} = r\vec{r}_o$, al derivar para obtener el vector velocidad y posteriormente el vector aceleración va a introducir otros unitarios que dificultan su resolución. Así, por ejemplo, el vector velocidad se podría expresar, en un instante determinado, mediante sus componentes según la dirección radial (definida por el unitario $\vec{r}_o$) y según una dirección ortogonal a ella (definida por el unitario $\vec{\theta}_o$) que podremos denominar transversal:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_o + r\frac{d\vec{r}_o}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_o + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\theta}_o = \dot{r}\vec{r}_o + r\dot{\theta}\vec{\theta}_o \qquad (VI.19)$$

pero que, en cada instante, formará con el radio vector un plano distinto al anterior que tampoco será, por lo general, el plano osculador, poniéndose en evidencia al derivar por segunda vez para obtener el vector aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\dot{r}\vec{r}_o + r\dot{\theta}\vec{\theta}_o] = \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{r}_o + \dot{r}\frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\vec{\theta}_o + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{\theta}_o + r\dot{\theta}\frac{d\vec{\theta}_o}{dt} = \ddot{r}\vec{r}_o + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}]\vec{\theta}_o + r\dot{\theta}\dot{\xi}\,\vec{\xi}_o \qquad (VI.20)$$

En cualquier caso, dado que dicha complejidad va a disminuir en el movimiento plano y es en el que nos vamos a centrar por ser el más común en el ámbito de nuestro estudio, pasaremos directamente a su análisis planteando en todo instante el paralelismo con lareferencia cartesiana ya que veremos que puede ser de gran utilidad.

Tanto en uno como en otro sistema de referencia, un punto material vendrá definido en un instante t por dos coordenadas:

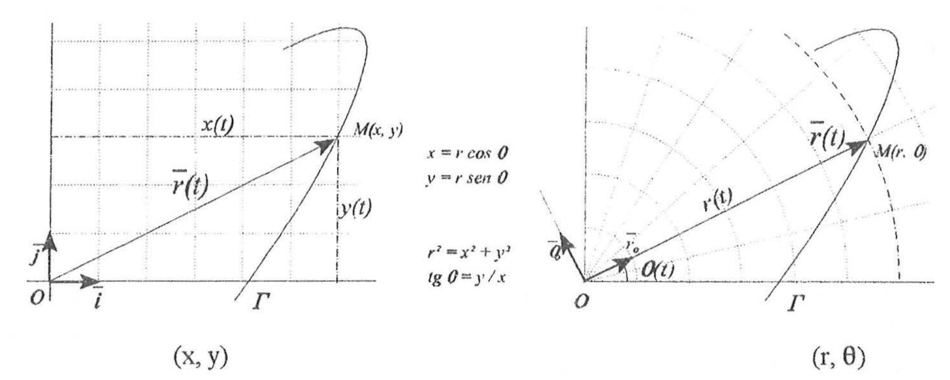


Figura VI.14

(x, y) — distancias a los ejes, entendidas como intersección de dos líneas coordenadas paralelas a los ejes cartesianos, ortogonales entre sí.

(r, θ) — radio vector y ángulo polar, entendidas igualmente como intersección de dos líneas coordenadas, radiales y concéntricas, ortogonales entre sí.

Los unitarios serán, en ambos casos, tangentes a las respectivas líneas coordenadas y perpendiculares entre sí:

$$\vec{i}, \vec{j} \qquad\qquad \vec{r}_o, \vec{\theta}_o$$

aunque con la diferencia que en cartesianas serán fijos mientras que en polares serán móviles y ligados al punto material, quedando la expresión del vector de posición en la forma:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad\qquad \vec{r} = r\vec{r}_o$$

VI.5.1 VELOCIDAD

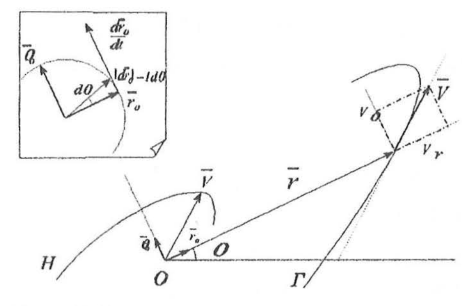


Figura VI.15

Así, teniendo en cuenta que tanto el módulo como el unitario son funciones del parámetro t, el vector velocidad se expresará:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_o + r\frac{d\vec{r}_o}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_o + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\theta}_o = \dot{r}\vec{r}_o + r\dot{\theta}\vec{\theta}_o \qquad (VI.21)$$

ya que la derivada del unitario $\vec{r}_o = \vec{r}_o(t)$ será un vector ortogonal a él y, por tanto, en la dirección $\vec{\theta}_o$, de módulo $\dot{\theta}$, como habíamos demostrado para las componentes intrínsecas del vector aceleración con los unitarios en la dirección tangencial y normal al vector velocidad.

Al igual que entonces, el último miembro de la *(VI.21)* nos indica que el vector velocidad puede descomponerse en dos vectores perpendiculares entre sí: el primero dirigido según $\vec{r}$ (***componente radial***) de valor la variación del módulo: $\dot{r}$ y el segundo perpendicular a él (***componente transversal***) de valor $r\dot{\theta}$, por lo que el módulo de la velocidad puede escribirse en la forma $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$ siendo $\varphi = \text{arc } tg \frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}}$ el ángulo que forma con el radio vector $\vec{r}$.

Es de notar que la velocidad carecerá de componente radial en un instante dado si $\dot{r}$ es nulo. Basta, para que esto ocurra, con que el origen de coordenadas se encuentre en la normal a la curva o, en particular, que sea el centro de curvatura de la trayectoria en el instante considerado. Entonces, simplemente, $v = r\dot{\theta}$. Este caso se presenta para todo instante en el movimiento circular referido al centro del círculo como origen.

Por el contrario, si no existe componente transversal en algún instante, la velocidad coincidirá en dirección con el vector de posición y, por ser tangente a la trayectoria, el móvil realizará un movimiento rectilíneo mientras persista esa circunstancia.

VI.5.2 ***ACELERACIÓN.***

También es sencillo, en el caso del movimiento plano, determinar las componentes radial y transversal de la aceleración ya que derivando la *(VI.21)*, teniendo en cuenta que la derivada del unitario $\vec{\theta}_o$ es un vector perpendicular a él y por tanto paralelo, aunque de sentido contrario, a $\vec{r}_o$, cuyo módulo es igual al módulo de la derivada de éste último por girar el mismo ángulo los dos, se obtendrá:

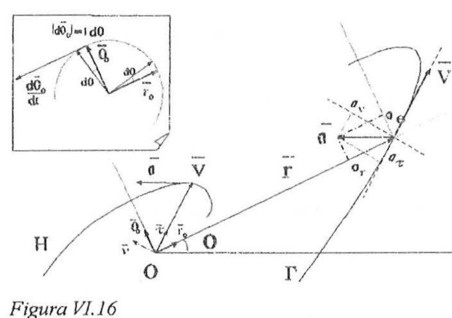


Figura VI.16

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\dot{r}\vec{r}_o + r\dot{\theta}\vec{\theta}_o] =$$

$$= \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{r}_o + \dot{r}\frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\vec{\theta}_o + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{\theta}_o + r\dot{\theta}\frac{d\vec{\theta}_o}{dt} = \qquad (VI.22)$$

$$= [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]\vec{r}_o + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}]\vec{\theta}_o$$

donde el término $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = a_r$ corresponde a la dirección de $\vec{r}$ (***componente radial***) y $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = a_\theta$ tiene la dirección perpendicular a $\vec{r}$ ***(componente transversal)***.

En general, las componentes radial y transversal de la aceleración no tienen por qué coincidir con las componentes intrínsecas (tangencial y normal), (salvo para el movimiento circular, obviamente) ya que unas están referidas a unos ejes ligados a un punto fijo O y al ángulo polar θ, mientras que las otras están ligadas al propio punto material (móvil) y al ángulo φ que forma la velocidad con el radio vector, que no tiene por qué seguir la misma ley de variación que aquél. En cualquier caso, resulta evidente que $a^2 = a_\tau^2 + a_\nu^2 = a_r^2 + a_\theta^2$, lo que puede resultar útil para calcular la componente normal cuando no se conoce la expresión paramétrica del radio de curvatura de la trayectoria que la partícula pueda seguir.

Y aunque a primera vista no parezca muy atractiva la idea de elegir esta notación para calcular las componentes del vector aceleración, no cabe duda que su aplicación más importante la vamos a encontrar en el movimiento causado por un campo de fuerzas central ya que, al estar la aceleración constantemente dirigida hacia un punto fijo (que denominaremos foco del campo), al tomar dicho punto como polo se anularía siempre (en todo instante) la componente transversal $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$, mientras que las componentes cartesianas o las intrínsecas en general no lo harán.

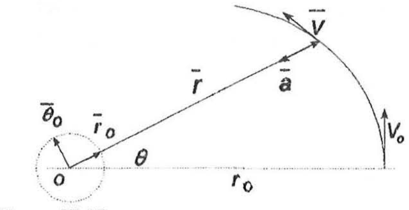


Figura VI.17

Esto se traduce en la expresión: $r^2\dot{\theta} = cte$ que es la característica del movimiento central (por ejemplo, las órbitas de los satélites, cuya aceleración es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia) y sólo en el caso de que el movimiento tuviera velocidad inicial nula o dirigida hacia el foco del campo podríamos decir que se trataría de un movimiento rectilíneo, como se tiende automáticamente a pensar.

VI.6 MOVIMIENTO RELATIVO Y ABSOLUTO

Hasta el momento, no hemos dirigido nuestra atención al posible movimiento del sistema de referencia en sí. Simplemente hemos supuesto que no se movía, pero en realidad nos daba igual porque en cualquier caso se trataba de estudiar el movimiento de nuestro móvil referido a él; es decir hemos estudiado el Movimiento Relativo a un sistema de referencia determinado, fijo o no. Sin embargo este dato va a ser de gran importancia al plantear la relación causa-efecto ya que el 2° Principio de la Mecánica establece una relación directa entre las fuerzas aplicadas en una partícula material y la aceleración a la que va a estar sometida: $\vec{F} = m\,\vec{a}$ siempre y cuando el marco referencial sea inercial, es decir, en reposo absoluto o con movimiento de traslación rectilíneo y uniforme respecto al marco absoluto, ya que los ***No inerciales,*** al moverse con aceleración respecto a un sistema inercial van a introducir un término "de arrastre" a la expresión anterior $\vec{F} = m\,(\vec{a}^{\,r} + \vec{a}^{\,a})$ que nos impide establecer la relación directa entre la fuerza y la aceleración relativa al marco elegido.

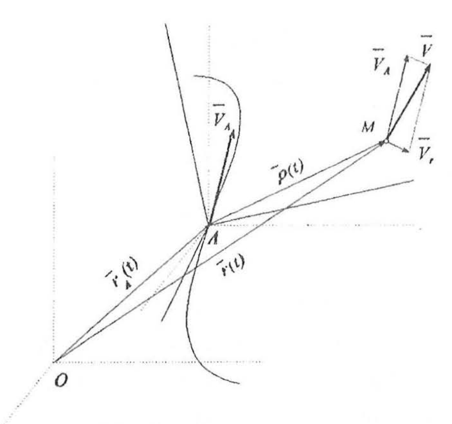


Figura VI.18

Si $\vec{\rho}$ es el vector de posición de un punto material respecto al sistema no inercial, considerándolo "fijo" podremos escribir, como hasta ahora:

$$\left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{mov} = \vec{v}_r \quad ,, \quad \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{mov} = \left(\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2}\right)_{mov} = \vec{a}_r \qquad (VI.23)$$

siendo, respectivamente, los vectores velocidad y aceleración *RELATIVOS* al sistema móvil ya que los valores ***ABSOLUTOS*** del movimiento serán los referidos al marco inercial respecto al cual el vector de posición de M será $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}$ que derivando quedará:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} \qquad (VI.24)$$

Ahora bien, tanto $\vec{r}_A$ como $\vec{\rho}$ están referidos a los ejes fijos o como mucho a ejes paralelos a los fijos; es decir, las componentes de dichos vectores están expresadas con los unitarios del sistema fijo, por lo que se entiende que $\frac{d\vec{r}_A}{dt}$ será la ***VELOCIDAD DE ARRASTRE*** del sistema móvil pero $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ solo podrá expresar la ***VELOCIDAD RELATIVA*** a los ejes móviles *si sus unitarios, en el transcurso del tiempo, no van a variar de dirección* (ya que el módulo es cte y no va a variar) aunque acompañen en su movimiento al punto A, sea cual sea su trayectoria. En tal caso podremos escribir:

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{v}_r \qquad \textit{y derivando nuevamente:} \qquad \vec{a} = \vec{a}_A + \vec{a}_r \qquad (VI.25)$$

En caso de que los ejes móviles además de trasladarse vayan a girar respecto al sistema inercial tendremos que considerar también la variación de los unitarios, lo que significa que el propio sistema se comportará como un sólido vacío câmo veremos a continuación.

VII. Cinemática del Sólido Rígido

VII.1 Generalidades. Elección de Forma de Estudio

Antes de afrontar el estudio de los sistemas materiales tenemos que analizar su constitución para elegir un método de estudio adecuado, entendiendo por sistemas materiales el conjunto de puntos materiales ***ligados*** entre sí por algún tipo de relación física (cohesión, ligaduras, ...), cuya distribución, necesariamente, habrá de reflejarse en el comportamiento conjunto de los puntos que forman el sistema ante cualquier tipo de solicitación externa, permitiendo distinguir entre sistemas:

DISCRETOS cuando puedan suponerse constituidos por un número finito pero extenso de puntos materiales (que no ocupan volumen), no porque realmente lo sean sino porque su distribución permita establecer simplificaciones (es lo ideal, lo que no se presenta en la realidad aunque en teoría se acepte)

CONTINUOS cuando, macroscópicamente hablando, llenen todo el volumen de materia aunque microscópicamente puedan encontrarse huecos, comunicados o no (de ahí la Mecánica del Medio Continuo en la que "todo" está lleno)

La distribución de la materia comportará, pues, necesariamente, algunas diferencias en el planteamiento del método de estudio, ya que el movimiento de un sistema quedará definido, de lo visto para el punto, cuando pueda conocerse en cualquier instante las características del movimiento de cada uno de los puntos que lo forman (posición, velocidad, aceleración), bien a través de las ecuaciones horarias o mediante el conocimiento de otros datos geométricos (trayectoria) y cinemáticos (p.ej. hodógrafa), no resultando ya muy atractiva la idea de un estudio "punto a punto" para sistemas discretos con muchos puntos, cuanto más para sistemas continuos con los que no se sabe cuando acabaríamos. Será necesario recurrir en estos casos a un estudio conjunto que permita establecer una relación entre el movimiento al menos uno de los puntos con todos los demás.

Por otro lado y atendiendo al comportamiento, tendremos a su vez que distinguir entre sistemas:

INDEFORMABLES cuando la distancia entre cualesquiera dos puntos del sistema es invariable, conservando siempre la misma forma (y por extensión el volumen, en el caso de los sistemas continuos)

DEFORMABLES cuando no cumple lo anterior, sea cual sea el grado de deformabilidad y sus características

En una primera clasificación podríamos decir que, a consecuencia de las fuerzas (o energías, traducibles a fuerzas) los gases se deforman mucho; los líquidos bastante y poco o muy poco los sólidos, pero asegurar la existencia del sólido rígido, como de hecho vamos a postular, es casi una utopía solo admisible para valores de fuerzas muy por debajo de la "resistencia" del material (tendríamos que definir antes este concepto) y para distribuciones muy "compactas", ya que, por lo general, nos vamos a encontrar con sólidos más o menos deformables cuyo comportamiento podrá ser:

ELÁSTICO que se caracteriza porque al cesar la causa que lo motiva se recupera la forma primitiva y que definiremos como elasticidad lineal cuando la causa sea proporcional al efecto

PLÁSTICO si sigue deformado al cesar la causa , aunque recupere parte de la forma inicial.

Dejando para más adelante otros comportamientos como el *Fluido* (caso límite del plástico), si continúa deformándose al remitir la causa, o el *viscoso* cuando el sistema material presenta, además, otras deformaciones en el movimiento, los únicos comportamientos que podrán intuirse en esta Asignatura serán el elástico y algunos plásticos (es obvio que si las cosas se calculan para que resistan únicamente a límites elásticos se limita más la solución que si se permite un ligero comportamiento plástico, siempre que pueda admitirse), y aunque vamos a estudiar fundamentalmente la mecánica (el comportamiento) del **SÓLIDO RÍGIDO** y **MECANISMOS** (sistemas deformables de sólidos no deformables), también tendremos ocasión de introducir otros comportamientos que nos iniciarán en su evaluación.

Así pues, aprovechando la condición de ***indeformabilidad del sólido*** (de la que partiremos), por la cual ***la distancia entre los puntos materiales no va a variar a lo largo del tiempo***, nos va a interesar el estudio ***instantáneo*** del sistema material (del sólido rígido en particular) para deducir la relación que pueda haber entre las velocidades de cada uno de los puntos en un instante genérico t (en el que paramos el tiempo) y que esa relación sea la que defina el movimiento de todos los puntos en cualquier instante, dado que, en el límite, si el sólido se moviese lentamente -como de hecho se van a producir las deformaciones que se estudiarán en Elasticidad- podríamos llegar a considerar que las velocidades son casi los vectores desplazamiento.

VII.2 CONDICIÓN GENERAL DE RIGIDEZ

Como tratamos de estudiar el problema a través de instantáneas, tendremos que llegar a las velocidades a partir de la condición de indeformabilidad "instantánea" que se pondrá de manifiesto expresando que las distancias entre dos puntos cualesquiera del sólido habrán de mantenerse constantes en todo instante ***t***.

Supongamos nuestro sólido referido a un marco (como sea) ligado al punto O y tomemos el vector $\vec{AB}$ que une dos puntos de aquél, siendo $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ y $|\vec{AB}|^2 = c^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$. Al derivar respecto del tiempo esta expresión, como la distancia no varía: $\frac{d}{dt}|\vec{AB}|^2 = \frac{d}{dt}c^2 = 0$ y, por tanto:

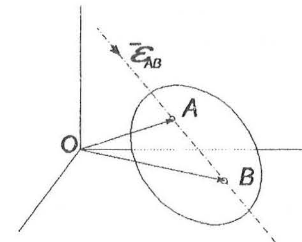


Figura VII.1

$$\frac{d}{dt}(\vec{AB}\cdot\vec{AB}) = 2\vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 2\vec{AB}\cdot\frac{d(\vec{OB}-\vec{OA})}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{AB}\cdot\frac{d\vec{OB}}{dt} - \vec{AB}\cdot\frac{d\vec{OA}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{V}_A = \vec{AB}\cdot\vec{V}_B$$

que en función del unitario en la dirección AB expresará la *CONDICIÓN GENERAL DE RIGIDEZ*:

$$\vec{\varepsilon}_{AB} \cdot \vec{V}_A = \vec{\varepsilon}_{AB} \cdot \vec{V}_B \qquad (VII.1)$$

ya que, de producirse cualquier deformación, del tipo que fuere (proporcional, elástica, plástica ... etc.) según una ley "ξ" la distancia entre A y B se expresaría como $|\vec{AB}| = c + \xi$ y derivando quedaría: $\vec{\varepsilon}_{AB} \cdot \vec{V}_A = \vec{\varepsilon}_{AB} \cdot \vec{V}_B + f(\xi)$

La semejanza de la condición general de rigidez recién obtenida con la ***propiedad de equiproyectividad*** del campo de momentos de un sistema de vectores $\vec{\varepsilon}_{AB} \cdot \vec{M}_A = \vec{\varepsilon}_{AB} \cdot \vec{M}_B$ nos incita a plantear el "***campo de velocidades***" de los puntos de un sólido rígido, como si se tratara de un campo de momentos, vectores por otro lado ligados igualmente a un punto como aquellos, lo que daría una solución a la definición del movimiento del sólido a partir del conocimiento del movimiento de uno de sus puntos, como ocurría al reducir el sistema de vectores a un punto cualquiera del espacio mediante el momento en dicho punto y la resultante colocada en él: $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \times \vec{R}$. De ser posible, habría que dilucidar previamente el significado cinemático de la resultante del sistema de vectores y del momento que esa resultante, como vector libre colocado en el punto de reducción, origina en otro punto del sólido.

VII.3 MOVIMIENTOS ELEMENTALES: TRASLACIÓN Y ROTACIÓN. ECUACIÓN FUNDAMENTAL

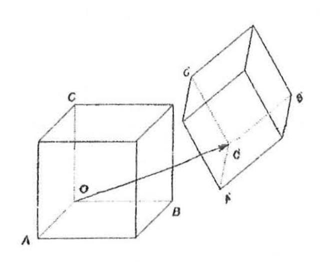


Figura VII.2

Podríamos imaginar en principio que un cuerpo cualquiera en movimiento, al cabo de un cierto tiempo, ha cambiado su posición respecto a la situación inicial modificando no solo las distancias de sus puntos a sus respectivos orígenes, sino también las inclinaciones de los ejes formados por cualesquiera dos puntos del sólido respecto a la inclinación que tenían en el instante inicial. Dicho de otro modo, eligiendo un punto cualquiera del sólido en el instante inicial (p.ej. O) como origen de referencia y materializando un triedro con otros tres puntos del sólido A B y C, al cabo de un instante t el punto O habrá pasado, en general, a ocupar una posición O' y los ejes O'A', O'B' y O'C' habrán modificado su inclinación inicial.

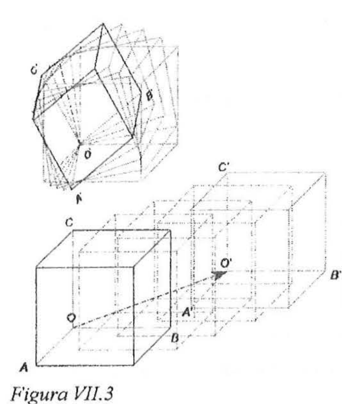


Figura VII.3

Sin embargo en Cinemática lo que verdaderamente viene a importar son las posiciones intermedias más que la inicial y final; es decir, las trayectorias seguidas por cada punto así como la rapidez en su consecución, ya que no es lo mismo que el cuerpo realice el movimiento de forma selectiva, llevando a cabo en una etapa una serie de "desplazamientos" paralelamente a sí mismo y en otra todos los "giros consecutivos" necesarios para hacer coincidir los planos del triedro de referencia o que, por el contrario, vaya realizando alternativamente pequeños giros y desplazamientos pseudoreales al tiempo que uno de sus puntos describe una trayectoria "obligada" de forma tal que, reproducida "a tiempo real", la imagen del movimiento no difiriese en gran medida de la que hubiera seguido libremente abandonado a las acciones correspondientes.

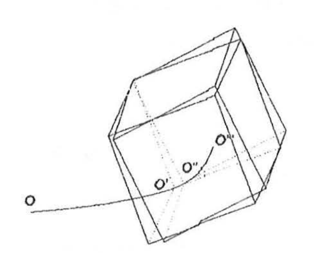


Figura VII.4

Y ésto es lo que vamos a suponer en lo sucesivo: que el movimiento más complejo puede considerarse compuesto de pequeños movimientos elementales, admitiendo que cuando los intervalos de tiempo en que descomponemos el proceso son "instantes" muy pequeños la "trampa" teórica no se va a notar ya que, en realidad, el movimiento de un sólido es algo más complejo que todo ello y lo que nosotros postulamos no es otra cosa que otra "mentira" matemática que nos aproxima a la realidad y para empezar tendremos que definir esos movimientos elementales que denominaremos ***TRASLACIÓN*** y ***ROTACIÓN***.

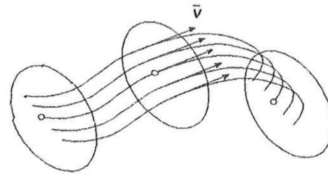


Figura VII.5

Podríamos decir que un sólido se traslada cuando cada uno de sus puntos describe una trayectoria paralela a la de los demás (*fig.VII.5*), en el sentido de que se obtendrían unas de otras mediante un simple desplazamiento. Si estas trayectorias son rectas, se dice que el movimiento es de traslación rectilínea, pero pueden igualmente ser trayectorias curvilíneas e, incluso, alabeadas sin dejar de ser una ***TRASLACIÓN***.

También podríamos decir que el sólido se traslada cuando todas las rectas que puedan trazarse con sus propios puntos se mantienen paralelas a sí mismas en todo instante, pero esta definición equivale a afirmar que el triángulo formado por tres puntos cualesquiera del sólido no alineados (triángulo director) se mantiene paralelo a sí mismo a lo largo de todo el movimiento ya que las distancias son invariables en el sólido rígido y un cuarto punto siempre mantendrá constante su distancia a los otros tres.

Sin embargo, ésto parece contradecirse con el planteamiento de instantáneas propuesto, así que, como los vectores velocidad de los puntos del sólido serán tangentes a las respectivas trayectorias y éstas han de ser paralelas en la traslación, nos limitaremos a decir que un sólido está experimentando un movimiento de ***TRASLACIÓN***

INSTANTÁNEA cuando, en un cierto instante, todos sus puntos tienen el mismo vector velocidad aunque en el instante siguiente dejen de serlo o en el instante anterior tuviesen cada uno su propia dirección. Una traslación instantánea no garantiza más que lo es en el instante considerado, mientras que un movimiento de traslación implica una continuidad en el tiempo aunque el vector equipolente a los vectores velocidad de los puntos del sólido cambie de dirección (trayectoria curvilínea).

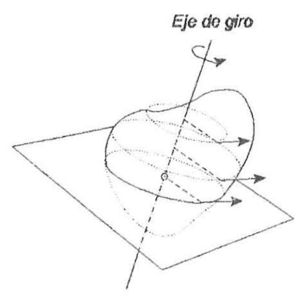


Figura VII.6

Si, por el contrario, dos puntos de un sólido rígido en movimiento permanecen fijos, tampoco se moverán los de la recta que determinan, mientras que los no pertenecientes a ella darán vueltas en torno, es decir, se moverán según circunferencias situadas en planos normales al eje, que denominaremos *EJE DE GIRO O DE ROTACIÓN* pues, al ser invariables las distancias de cualquiera de los puntos del sólido a dos puntos determinados del eje, su trayectoria habrá de encontrarse en la intersección de dos esferas con centros en dichos puntos. En consecuencia, diremos que un sólido gira alrededor de un eje cuando todos sus puntos tengan como trayectorias circunferencias contenidas en planos perpendiculares al eje, de centros los puntos de aquél.

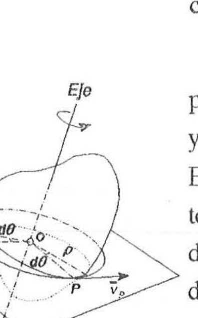


Figura VII.7

O bien, dicho en términos de instantáneas, cuando la velocidad de cada punto, por ser tangente a la trayectoria, tenga dirección normal al plano determinado por el eje y el punto en cuestión y su módulo sea proporcional a la distancia al eje de rotación. En este sentido diremos que el sólido está sometido a una ***ROTACIÓN INSTANTÁNEA*** en torno a un ***eje instantáneo*** cuando en el instante considerado la velocidad de cualquiera de sus puntos se comporta como si fuera la velocidad de un movimiento circular, describiendo un arco de circunferencia $ds = \rho\, d\theta$ en un instante de duración dt, o lo que es lo mismo, con una velocidad instantánea $v = \omega\, \rho$, mientras que si la rotación es continuada diremos que el sólido realiza un ***GIRO*** propiamente dicho en torno a un eje que no cambia con el tiempo.

El ángulo $d\theta$ que gira el radio $\vec{PO}$ que une cada punto al eje en un tiempo dt será el mismo para todos los puntos alineados con él y con el del eje de giro contenido en el mismo plano perpendicular por la condición de rigidez del sólido ya que, en el instante sucesivo, tendrán que seguir alineados; pero igualmente todas las rectas que cortan al eje tendrán la misma variación angular para que las distancias entre puntos se mantengan. Por tanto, la magnitud $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ que, en principio, podrá variar con el tiempo, se denominará ***velocidad angular* del sólido**, ya que no es exclusiva de un solo punto, como su velocidad $\vec{v}$, sino de todos los puntos de aquél.

Pero esta magnitud implica una dirección (la del eje de rotación) y un sentido (el de giro) por lo que se trata obviamente de una magnitud vectorial (con las connotaciones que conlleva) que representaremos por un vector $\vec{\omega}$ que no está asociado a ningún punto en particular sino a un eje. Responde por tanto a las características que definía un ***vector deslizante*** y en lo sucesivo lo consideraremos como tal y lo denominaremos *VECTOR ROTACIÓN*.

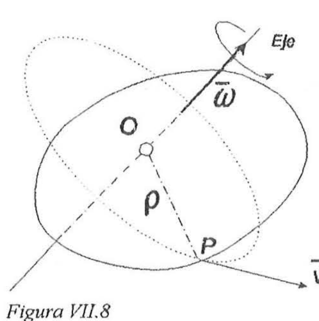


Figura VII.8

En consecuencia, dado que la velocidad de un punto P que dista ρ del eje de giro vale $v = \omega\, \rho$ estando dirigida como ya hemos indicado, si imaginamos el vector $\vec{\omega}$ situado sobre el eje (*fig. VII.8*), cabría definir vectorialmente la velocidad del punto, siendo O un punto cualquiera del eje, como "***momento del vector*** $\vec{\omega}$ ***respecto al punto P en cuestión***":

$$\vec{V}_P = \vec{PO} \times \vec{\omega} \qquad (VII.2)$$

con la dirección perpendicular al plano formado por $\vec{PO}$ y $\vec{\omega}$, el sentido de giro que da el primer vector por el segundo y el módulo $|\vec{v}_P| = |\vec{PO}| \cdot |\vec{\omega}| \cdot sen 90° = \omega \cdot \rho = v$.

En lo sucesivo, por tanto, las velocidades de los puntos del sólido originadas por un giro o rotación instantánea las expresaremos como "momentos" del *VECTOR ROTACIÓN* antes definido respecto a dichos puntos, y más exactamente del *VECTOR DE ROTACIÓN INSTANTÁNEA*, simplificándose extraordinariamente el problema al resultar inmediata la expresión genérica del "***campo de velocidades***" generado.

En consecuencia, si el movimiento instantáneo de un sólido lo hemos descompuesto en sus movimientos elementales de traslación y rotación, respecto de un eje que pase por un punto cualquiera O, como postulábamos, podremos expresar la velocidad de otro punto cualquiera como suma de las velocidades originadas por cada movimiento que, por tratarse de vectores, será una suma vectorial de la forma:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{PO} \times \vec{\omega} \qquad (VII.3)$$

que denominaremos **ECUACIÓN FUNDAMENTAL** del movimiento de un sólido rígido tomado uno de sus puntos como reducción.

VII.4 IMAGEN GENERAL DEL MOVIMIENTO DEL SÓLIDO RÍGIDO

Claramente la ecuación fundamental deducida nos recuerda la ecuación de paso de momentos de un s.v.d. y dado que la condición general de rigidez del sólido rígido no era otra cosa que la propiedad de equiproyectividad de un campo de momentos, podemos decir que el campo de velocidades de un sólido rígido, en un instante determinado, se comporta (ya que todo es un invento físico-matemático) como si fuera el campo de momentos de un sistema de vectores deslizantes y, en base a ello, entenderemos que al vector de rotación instantánea inventado le toca representar el papel de Resultante $\vec{R} = \vec{\Omega}$ de un sistema de rotaciones instantáneas, ya sea reales o inventadas para reproducir un movimiento equivalente a un movimiento real de compleja definición y distinto, en general, para cada instante.

Podemos tomar un punto arbitrario, por ejemplo A, para referir a él todas las velocidades del sólido, obteniendo entonces la velocidad $\vec{V}_B$ de un punto genérico, B, sumando a la velocidad $\vec{V}_A$ del punto de referencia elegido, que consideraremos se traslada únicamente arrastrando a los demás puntos con la misma velocidad de traslación, el vector $\vec{V}' = \vec{BA} \times \vec{\Omega}$, que representa el giro de los puntos del sólido respecto al eje de giro supuesto aplicado en A:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{BA} \times \vec{\Omega} \qquad (VII.4)$$

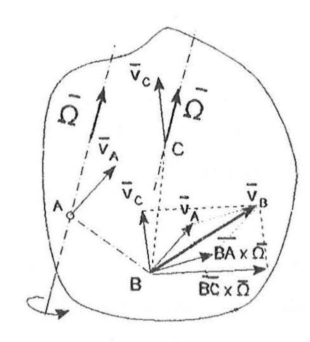


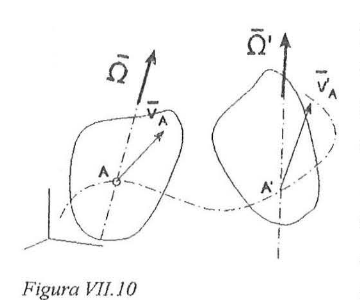
Figura VII.9

Al tomar otro punto de referencia cualquiera C habremos de considerar que su velocidad será distinta, en general, de $\vec{V}_A$ pero, en cada instante, $\vec{\Omega}$ será independiente del punto considerado ya que es significativo del sólido, no de los puntos del sólido (lo que también puede inferirse de su calidad de vector libre como resultante de un s.v.d.), comprobándose que:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{BC} \times \vec{\Omega} = (\vec{V}_A + \vec{CA} \times \vec{\Omega}) + \vec{BC} \times \vec{\Omega} = \vec{V}_A + (\vec{CA} + \vec{BC}) \times \vec{\Omega} = \vec{V}_A + \vec{BA} \times \vec{\Omega}$$

y obteniéndose, en definitiva, la misma velocidad.

En consecuencia, *el movimiento general de un sólido puede considerarse como la composición de un movimiento de* ***traslación***, que depende del punto elegido como referencia, *y uno de* ***rotación*** en torno de dicho punto, que sería el mismo para cualquier punto del sólido que se tomase como punto de reducción.


Figura VII.10

Y, como nuestro objetivo es conocer o tener definida en todo instante la posición de cada punto del sólido, siendo suficiente, como vimos en el tema anterior, con conocer la velocidad para un instante t y la posición en un instante en particular que resuelva las constantes de integración necesarias para definir la trayectoria, para tener definido completamente el movimiento de un sólido bastará con conocer la función $\vec{V}_A(t)$ para un solo punto A del que se conozca su posición en un instante determinado (p. ej. el instante inicial) y el vector de rotación $\vec{\Omega}(t)$ a que estará sometido el sólido en cada instante, entendiéndose que éste gira respecto a unos ejes solidarios con A y se traslada simultáneamente con él.

VII.5 Eje Instantáneo de Rotación y Deslizamiento; Movimiento Helicoidal

Sin embargo, para simplificar el problema, buscaremos como punto de reducción uno que no se mueva o, al menos, que tenga la mínima velocidad. Es decir, en términos de vectores deslizantes, buscaremos el punto o punto que tengan momento nulo, si existen, o, en su defecto, los de momento mínimo que serán aquellos cuya velocidad sea paralela al vector de rotación $\vec{V}_I = \vec{V}_A + \vec{IA} \times \vec{\Omega} = \lambda\,\vec{\Omega}$.

Con carácter general, como ocurría en vectores deslizantes, no tiene por qué existir puntos de velocidad nula en un instante dado, pero sí podemos buscar, sin más que aplicar la teoría de vectores deslizantes, los que tienen la velocidad mínima $\vec{V}_I = \frac{\vec{V}_A \cdot \vec{\Omega}}{\Omega} \cdot \frac{\vec{\Omega}}{\Omega}$, que denominaremos *VELOCIDAD DE DESLIZAMIENTO* por entenderse como un "deslizamiento instantáneo" de los puntos que forman en un instante dado el "Eje Central" a lo largo del propio eje, respecto al cual girarán simultáneamente en planos perpendiculares todos los puntos del sólido excepto ellos, obviamente por estar contenidos en él, pudiéndose afirmar que la cantidad $\vec{V}_B \cdot \vec{\Omega} = \vec{V}_A \cdot \vec{\Omega} = k$ es una cantidad constante en cada instante (automomento del sistema) lo que, por otra parte, se deduce en el acto de (V.4) si multiplicamos escalarmente por $\vec{\Omega}$.

Esa velocidad mínima variará de un instante a otro, por lo general, en magnitud y dirección, lo que hará variar el propio eje, tanto de dirección como de posición. Es decir, los ejes centrales del movimiento estarán formados por puntos distintos del sólido en cada instante. Por ello, dada su fugacidad, lo denominaremos *EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN Y DESLIZAMIENTO*. Pero, en cada instante, los puntos del sólido iniciarán un desplazamiento compuesto por una traslación paralela al eje y un giro en el plano perpendicular, que no es otra cosa que un segmento de hélice lo nos permite denominar el movimiento del sólido como *MOVIMIENTO HELICOIDAL EQUIVALENTE*, o más exactamente, *MOVIMIENTO INSTANTÁNEO HELICOIDAL* ya que sólo seguirá esa hélice durante un breve intervalo, cambiando de trayectoria helicoidal al cambiar el eje y la velocidad de deslizamiento con el tiempo.

Análogamente, haciendo uso de la teoría de vectores deslizantes y de la clasificación establecida en base al automomento y a la resultante, podremos buscar sistemas de rotaciones equivalentes al del movimiento instantáneo del sólido que serán, en definitiva, los que produzcan el mismo campo de velocidades en cada instante.

Obviamente en el caso general el sistema equivalente más sencillo estará compuesto por dos rotaciones conjugadas, aunque no tiene por qué ser el sistema equivalente que más nos convenga (*fig. VII.11a*).

El caso particular correspondiente a una traslación se obtendría para $\vec{\omega} = 0$ y entonces el sistema de vectores deslizantes se reduciría a un par (*fig. VII.11c*).

El caso de movimiento de rotación sin traslación corresponderá a $\vec{\omega} \cdot \vec{v} = 0$ en cuyo caso (*fig. VII.11b*) cabrá hallar un punto P de velocidad $\vec{v} = 0$ que estará situado en el eje de rotación.

$\vec{V} \cdot \vec{\Omega} \neq 0$	$\vec{\Omega} \neq 0$	$V_d \neq 0$ $\vec{V}_P = \vec{V}_d + \vec{\Omega} \times \vec{IP}$	Sist. general: MOV. HELICOIDAL	El sistema equivale a dos rotaciones conjugadas o bien a una rotación y un PAR equivalente a una traslación	*Figura VII.11*a
$\vec{V} \cdot \vec{\Omega} = 0$		$V_d = 0$ $\vec{V}_P = \vec{\Omega} \times \vec{IP}$	Sist. degenerado: MOV. CIRCULAR	El sistema equivale a una rotación única en torno al eje instantáneo de rotación y deslizamiento	*Figura VII.11*b
	$\vec{\Omega} = 0$	$V = cte \neq 0$ $\vec{V}_P = \vec{V}_d = \vec{V}$	Sist. de velocidad única: MOV. DE TRASLACIÓN	El sistema equivale a dos rotaciones de igual módulo y sentidos opuestos con distinta recta de acción: PAR	*Figura VII.11*c
		$V = cte = 0$	Sistema Nulo: NO SE MUEVE	El sistema equivale a dos rotaciones de igual módulo y recta de acción con sentidos opuestos	*Figura VII.11*d

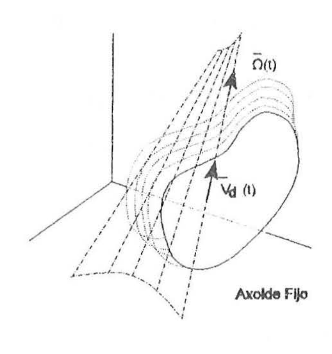
VII.6 AXOIDES: FIJO Y MÓVIL

Podemos imaginar distintas formas de observar el movimiento de un sólido que dependerán del punto de vista:

a) La Fija, en la que se observa el movimiento de traslación y rotación instantáneos del sólido desde fuera de éste, en un sistema de referencia que se considera fijo.

b) Trasladándose el observador simultáneamente con el sólido como si estuviera situado en el punto de reducción del movimiento del sólido respecto al cual el sólido realizará, por tanto, exclusivamente un giro.

c) Trasladándose y girando simultáneamente con el sólido como si el observador ocupara un punto de éste distinto al de reducción, posición desde la que no apreciaría el movimiento del sólido, sino la del espacio geométrico exterior.



Aunque la imagen más simplificada del movimiento en un instante dado se obtendrá reduciéndolo a un punto del *eje instantáneo de rotación y deslizamiento*, como los valores de la rotación y la velocidad de deslizamiento instantáneos serán en general función del tiempo, no tiene sentido elegir uno de dichos puntos "instantáneos" para iniciar el estudio del movimiento en todo el proceso ya que en el instante siguiente dejará de pertenecer al eje y pasará a ser un punto del sólido más (aunque quede "marcado" de alguna manera por ello). Lo práctico es reducir el movimiento en algún punto especialmente significativo del sólido, bien por ser conocida su trayectoria o por tener alguna particularidad de interés, aunque pueda pertenecer al e.i.r.d. en algún instante dado.

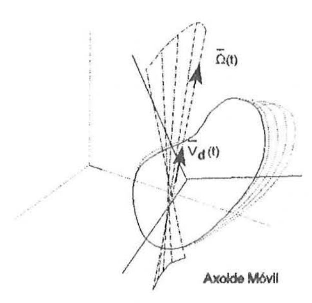


Figura VII.12

Según sea entonces el punto de vista del observador se tendrán igualmente imágenes distintas del eje i.r.d. O, dicho de otro modo, en cada instante un observador fijo y otro móvil que se mueva solidariamente con los puntos del sólido verán la misma recta, pero cada uno desde su punto de vista "registrarán" con diferentes coordenadas su localización respecto a ellos. Será como si hubiese en todo instante dos rectas, superpuestas e indiferenciables para ambos observadores, que en instantes sucesivos o anteriores permitirán, sin embargo, su diferenciación a través de la huella dejada en ambos sistemas de referencia cuyos "registros" definirán sendas superficies "regladas" que denominaremos ***AXOIDES***.

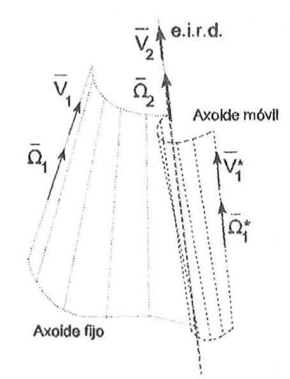


Figura VII.13

Si imaginamos materializado el eje i.r.d en una delgada y larga aguja clavada en el sólido que en cada instante pasa a ser otra aguja diferente también inserta en el cuerpo móvil, obtendremos una superficie reglada como lugar geométrico del eje instantáneo referido al cuerpo en movimiento que denominaremos ***axoide móvil***. El lugar geométrico de estos mismos ejes instantáneos, imaginando que cada uno de ellos va quedando "clavado" en el sistema fijo respecto al cual se mueve el cuerpo, constituye el denominado ***axoide fijo***. La primera superficie será, pues, el lugar geométrico de la "marca" que dejan en el propio sólido las rectas que han sido y serán e.i.r.d. La segunda, el lugar geométrico de las "marcas" que han dejado y dejarán en el espacio por el que se mueve el sólido los respectivos e.i.r.d.

Podríamos resumirlo diciendo que hay dos variaciones simultáneas del e.i.r.d.: una respecto al espacio (fijo) y otra respecto al sólido (móvil) y que el lugar geométrico de las distintas posiciones será una característica del movimiento general del sólido ya que permitiría reproducirlo imaginando que el axoide móvil rueda sobre el fijo al tiempo que desliza a lo largo de la generatriz común (el eje instantáneo de rotación y deslizamiento). Conociendo, pues, las dos superficies parece que no haría falta saber nada más del movimiento ya que permitirían reproducirlo sistemáticamente haciendo coincidir ambos ejes (fijo y móvil). Y así es como se generan las maquinarias y cómo, en el campo de la ingeniería, se trata de evitar los desgastes de las piezas, buscando movimientos que no tengan velocidad de deslizamiento; solo giro (es decir, vuelven a interesarnos en particular aquellos campos de "momentos" (velocidades) en los que existen puntos de momento nulo (velocidad nula) que veremos a continuación). Sin embargo se trata solamente de una característica geométrica, no cinemática, ya que nada indica la "rapidez" con la que se tendría que reproducir.

Para determinar las ecuaciones del eje instantáneo, que serán también la de los axoides si eliminamos el tiempo entre las dos ecuaciones de la recta, seguiremos un procedimiento idéntico al de las ecuaciones del eje central de un sistema de vectores deslizantes, es decir, expresaremos el paralelismo entre la velocidad de los puntos del eje y el vector rotación $\bar{\omega}$.

Si $\vec{v}_o = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j} + v_{oz}\vec{k}$ es la velocidad del punto del sólido que pasa, en el instante considerado, por el origen del sistema de referencia (si estuviera fuera del sólido $\vec{v}_o$ sería, naturalmente, la velocidad que tendría O si se moviera solidariamente con el cuerpo móvil) nos bastaría sustituir este vector en la expresión del eje central en lugar del momento $\vec{M} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$ y el vector $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$ en vez de las componentes de la resultante $\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ obteniendo:

$$\frac{v_{ox} + z\omega_y - y\omega_z}{\omega_x} = \frac{v_{oy} + x\omega_z - z\omega_x}{\omega_y} = \frac{v_{oz} + y\omega_x - x\omega_y}{\omega_z} \qquad (VII.5)$$

donde eliminando el tiempo (tanto $\vec{v}_o$ como $\vec{\omega}$ son funciones de t) obtenemos la ecuación del axoide fijo.

Para obtener el axoide móvil consideraremos un sistema o'x'y'z' que se mueve con el sólido y, si $\vec{v}_{o'} = v_{o'x'}\vec{i} + v_{o'y'}\vec{j} + v_{o'z'}\vec{k}$ y $\vec{\omega} = \omega_{x'}\vec{i} + \omega_{y'}\vec{j} + \omega_{z'}\vec{k}$ son, respectivamente, las componentes de la velocidad del punto O' y el vector $\vec{\omega}$ referidas a los ejes solidarios con el cuerpo, la ecuación del axoide móvil se obtendrá de:

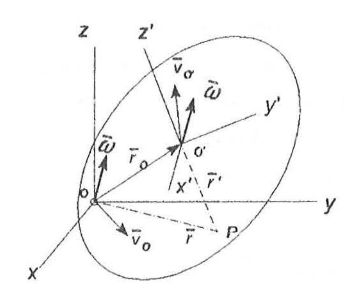


Figura VII.14

$$\frac{v_{o/x/} + z'\omega_{y/} - y'\omega_{z/}}{\omega_{x/}} = \frac{v_{o/y/} + x'\omega_{z/} - z'\omega_{x/}}{\omega_{y/}} = \frac{v_{o/z/} + y'\omega_{z/} - x'\omega_{y/}}{\omega_{z/}} \qquad (VII.6)$$

Si queremos obtener la ecuación del axoide fijo tomando como punto de referencia el punto O' del sólido hemos de utilizar el momento $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ del punto genérico P respecto a O' y teniendo en cuenta que $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_o$ (*fig. VII.14*) resulta:

$$\frac{v_{o'x} + (z - z_o)\omega_y - (y - y_o)\omega_z}{\omega_x} = \frac{v_{o'y} + (x - x_o)\omega_z - (z - z_o)\omega_x}{\omega_y} = \frac{v_{o'z} + (y - y_o)\omega_x - (x - x_o)\omega_y}{\omega_z} \qquad (VII.7)$$

donde la velocidad de O' está ahora referida a los ejes fijos.

Análogamente, la ecuación del axoide móvil, tomando como punto de referencia el del sólido que pasa por O, será:

$$\frac{v_{ox/} + (z' - z'_o)\omega_y - (y' - y'_o)\omega_z}{\omega_x} = \frac{v_{oy/} + (x' - x'_o)\omega_z - (z' - z'_o)\omega_x}{\omega_y} = \frac{v_{oz/} + (y' - y'_o)\omega_x - (x' - x'_o)\omega_y}{\omega_z} \qquad (VII.8)$$

donde las componentes de $\vec{v}_{o'}$, como todas las demás, han de referirse a los ejes móviles y otro tanto ocurre con el vector $\vec{r}_o$ cuyas componentes van con signo negativo al suponérsele con origen en O' y extremo en O.

En cada caso concreto puede convenir la utilización de una u otra formulación pero, generalmente, se toma el mismo punto de referencia para determinar ambos axoides, por lo que se utiliza la pareja de ecuaciones (*VII.5*) y (*VII.8*) o bien la (*VII.6*) y (*VII.7*). En cualquier caso nuestro interés se va a centrar fundamentalmente en los casos particulares de movimientos cuyo "automomento" era nulo $\vec{V} \cdot \vec{\Omega} = 0$ y en ellos la obtención de axoides tendrá menor complicación.

VII.7 SÓLIDO CON UN PUNTO FIJO; CONOS DE POINSOT

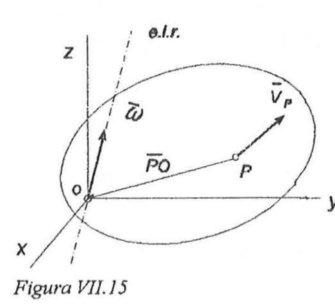


Figura VII.15

En estos casos el punto fijo del sólido es tan notable que resulta irresistible tomarlo como origen de referencia O, al ser $\vec{V}_O = \vec{0}$ y pertenecer, por tanto, en todo instante al eje instantáneo de rotación que deja de ser ya de deslizamiento. Este eje y $\vec{\omega}$ (*t*) podrán variar con el tiempo pero, en cada momento, el sólido estará animado exclusivamente de una *rotación instantánea* y girará en cada instante en torno de un eje que pase por dicho punto aunque cambie de dirección. Refiriendo el movimiento al punto fijo O, cuya velocidad es nula, obtenemos:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{PO} \times \vec{\omega} = \vec{PO} \times \vec{\omega}$$

es decir, como ya indicábamos, el cuerpo gira en torno de un eje que pasa siempre por O, siendo los axoides sendos conos de vértices el punto fijo O, conocidos como **CONOS DE POINSOT**, rodando el móvil sobre el fijo sin deslizar.

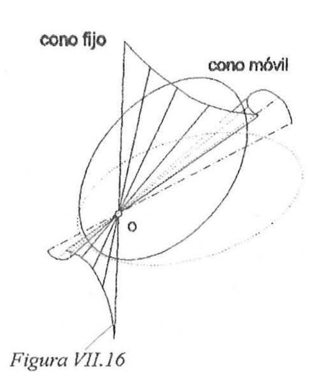


Figura VII.16

La forma de obtener analíticamente los conos, en base a un sistema referencial, fijo (p. ej. oxyz) o móvil ligado al sólido (ox'y'z'), es buscar la ecuación del eje instantáneo de rotación que será la de una recta que pasa por un punto fijo O con una dirección definida por el vector de rotación:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) = \omega_x(t)\vec{i} + \omega_y(t)\vec{j} + \omega_z(t)\vec{k} = \omega_x'(t)\vec{i}' + \omega_y'(t)\vec{j}' + \omega_z'(t)\vec{k}'$$

E.I.R. (ejes fijos): $\frac{x-0}{\omega_x(t)} = \frac{y-0}{\omega_y(t)} = \frac{z-0}{\omega_z(t)}$ ⇨ Cono Fijo: eliminando t ⇨ F(x y z) = 0

E.I.R. (ejes móviles): $\frac{x'-0}{\omega_x'(t)} = \frac{y'-0}{\omega_y'(t)} = \frac{z'-0}{\omega_z'(t)}$ ⇨ Cono Móvil: eliminando t ⇨ ϕ(x'y'z') = 0

VII.8 MOVIMIENTO PLANO DE UN SÓLIDO

Aunque se le suele denominar erróneamente movimiento del "sólido plano", se trata de estudiar no solo el movimiento de una figura plana rígida (de espesor despreciable) en su plano, sino de forma más general el de un sólido rígido que se mueva paralelamente a un plano fijo, manteniendo constantes las distancias de los puntos del sólido al plano fijo o director, con las siguientes características (*fig. VII.17*):

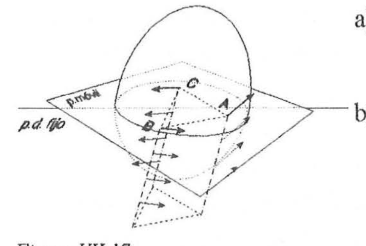


Figura VII.17

a) Las velocidades de todos los puntos del sólido, en todo instante, son paralelas al plano fijo ya que si no lo fueran no se mantendrían equidistantes de él.

b) Las velocidades de los puntos del sólido situados en rectas perpendiculares al plano director son, en todo instante, vectores equipolentes ya que si tuvieran distinto valor, aún siendo paralelas al plano, al instante siguiente la distancia entre puntos aumentaría o disminuiría, en contra de la hipótesis de sólido rígido.

En consecuencia, toda sección plana que demos mediante planos paralelos al fijo tendrá distribuciones de velocidades exactamente iguales. De aquí que baste estudiar únicamente una sección que representaremos en el plano del papel como un plano móvil (de la sección plana) sobre otro fijo (geométrico) (*fig.VII.18*) pues en todas las demás pasará lo mismo, favoreciendo su confusión con el movimiento de un sólido plano que, en general no tiene por qué moverse en su plano.

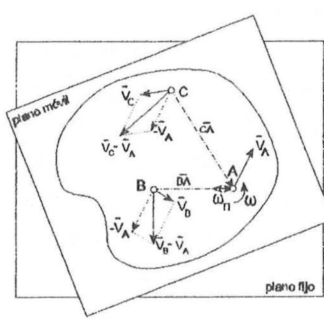


Figura VII.18

Por tanto, si las velocidades $\vec{V}_A$, $\vec{V}_B$ y $\vec{V}_C$ de tres puntos (no alineados) del plano están contenidas en él, también se encontrarán en el plano los vectores $\vec{V}_B - \vec{V}_A = \vec{BA} \times \vec{\omega}$ y $\vec{V}_C - \vec{V}_A = \vec{CA} \times \vec{\omega}$. Si $\vec{\omega}$ tuviese componente proyectada sobre el plano, ω_π, podría darse que estuviera alineada con la dirección de dos de esos puntos, por ejemplo A y B (*fig.VII.18*), cumpliéndose la pertenencia al plano de $\vec{V}_B - \vec{V}_A$ pero no la de $\vec{V}_C - \vec{V}_A$, que tendría componente ortogonal al plano, en contra de la hipótesis inicial. *La rotación instantánea $\vec{\omega}$ ha de ser por tanto siempre normal al plano director*, verificándose $\vec{\omega} \cdot \vec{v} = 0$ para todo punto de la sección, lo que corresponde al caso de automomento nulo del sistema de vectores deslizantes, del que es resultante $\vec{\omega}$, y se traduce en velocidad de deslizamiento $V_d = 0$.

VII.8.1 CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN. PROPIEDADES.

El sistema se puede reducir pues a un solo vector $\vec{\omega}$ situado sobre el **EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN** (a secas) y en una primera aproximación podemos ya establecer que los axoides del movimiento del sólido serán cilindros de directriz perpendicular al plano director cuyas intersecciones con los planos paralelos a él serán idénticas sea cual sea la sección dada recibiendo el nombre de **POLARES DEL MOVIMIENTO**, fija o móvil según lo sea el axoide correspondiente.

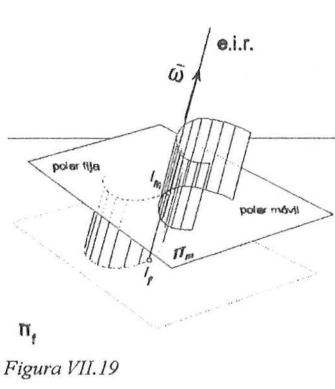
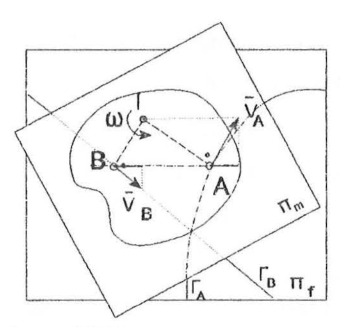


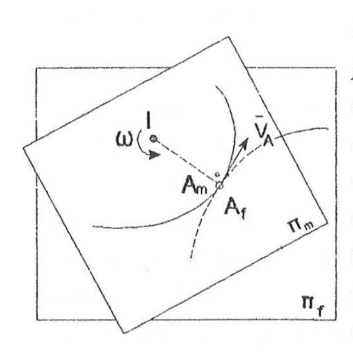
Figura VII.19

El **EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN** cortará pues al plano fijo en un punto I_F y al móvil en I_M, dejando su "huella" en uno y otro plano a través de las polares. El punto en el que coincide en cada instante la representación de I_F y I_M en el plano de trabajo, se denomina **CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN** de la sección plana y ***es el único punto del plano móvil*** (referido a los ejes móviles) ***que no tendrá velocidad en el instante considerado*** (el referido a ejes fijos es el que está "debajo" del que no tiene velocidad), lo que no quiere decir que en otro instante ese mismo punto que ocupaba sí la tenga, pudiendo tener, en consecuencia, aceleración en el instante en que no tiene velocidad. El movimiento se reduce, pues, a la rodadura, sin deslizamiento, del cilindro móvil sobre el fijo en torno al eje instantáneo de rotación o, lo que es lo mismo, a la rodadura de la polar móvil sobre la fija en el plano de la figura en torno al ***c.i.r.***

Obviamente, todos los puntos que se encuentran perpendicularmente al plano por I tampoco tendrán velocidad por ser el c.i.r. de los planos paralelos respectivos y tener en común la propiedad de ser el punto alrededor del cual giran (en ese instante) todos los puntos de su sección.


Figura VII.20

En resumen, la velocidad de un punto A de la sección se obtendrá directamente como $\vec{V}_A = \vec{IA} \times \vec{\omega}$ ya que se trata de un caso de sistema "degenerado" o "circular", siendo $\vec{V}_A \perp \vec{IA}$, es decir, la velocidad será perpendicular a la recta que une el punto con el centro instantáneo de rotación de la sección móvil. Esto puede aplicarse a todos los puntos de la figura y como la velocidad es tangente a la trayectoria se tiene la siguiente propiedad: ***Las normales a las trayectorias de los puntos de una sección plana pasan, en cada instante, por el centro instantáneo de rotación***, propiedad que nos va a facilitar extraordinariamente la resolución gráfica de problemas (*fig.VII.20*) junto con la condición general de rigidez $\vec{V}_A \cdot \vec{AB} = \vec{V}_B \cdot \vec{AB}$.


Figura VII.21

Otra de las propiedades, menos obvia pero no menos importante, es que ***si una curva del plano móvil se mantiene constantemente tangente a una curva del plano fijo, el c.i.r. se encontrará en la normal común a ambas por el punto de tangencia*** ya que la velocidad del punto material que coincide en cada instante con el de tangencia (*fig.VII.21*) solo podrá tener la dirección de la tangente común o se separaría de la curva fija en el instante siguiente, dejando de ser tangentes. Por analogía, si una de las curvas degenera en una recta, el c.i.r. se obtendrá igual y si ambas degeneran en rectas el movimiento será una traslación ya que al haber muchos puntos en contacto las perpendiculares respectivas serán paralelas, cortándose en el infinito. Por último, si una de las curvas degenera en un punto el c.i.r. estará en la perpendicular a la otra y si ambas degeneran en un solo punto (que tendrá que ser fijo obviamente: p.ej. una articulación) éste será el c.i.r.

VII.8.2 DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES

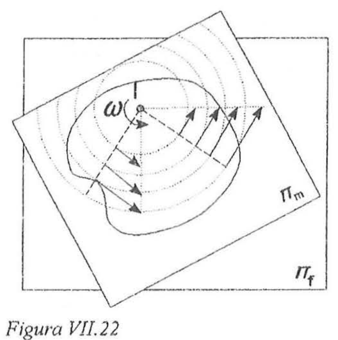


Figura VII.22

Para analizar el movimiento plano de un sólido comenzaremos pues por definir una sección plana, siendo irrelevante la forma del sólido frente a la caracterización del movimiento ya que nos fijaremos exclusivamente en dos de sus puntos A y B cuya distancia será invariable por la condición de rigidez. Conociendo sus trayectorias podremos obtener el c.i.r. como ya hemos indicado trazando las perpendiculares, pero estos datos no bastan para obtener el valor y sentido de la rotación como tampoco bastarán para obtener el propio c.i.r. si ambas tienen una normal común. Es preciso conocer algún otro dato cinemático (en el que intervenga el tiempo), lo que nos revela algo importante sobre ***el c.i.r.*** y es que ***se trata de una propiedad geométrica, no cinemática, del movimiento***.

Con esos datos ya será posible la obtención de ω y tendremos definidas las velocidades de todos los puntos del sólido sin más que referirlas al c.i.r. ya que su módulo será ω por la distancia del punto al c.i.r., su dirección perpendicular a la de esa distancia y su sentido el que marque el de ω, con la particularidad que, en cada instante, todos los puntos de la sección tendrán el mismo valor modular de la velocidad (*fig. VII.22*).

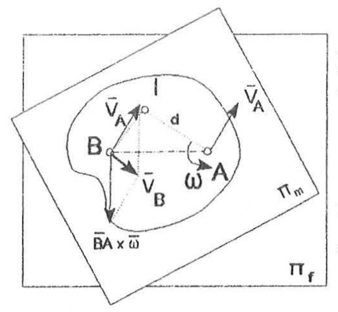


Figura VII.23

No obstante, en algunos casos no será necesario reducir el movimiento al c.i.r. ya que siempre podremos reducirlo a un punto cualquiera A del que se conozca su velocidad $\vec{V}_A$, si se conoce además la rotación:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{BA} \times \vec{\omega} \qquad (VII.9)$$

teniendo igualmente definido el movimiento del sólido pero, obviamente, con esos datos se obtendrá también la posición del c.i.r. ya que $\vec{V}_I = 0$ y por tanto:

$$\vec{V}_I = \vec{V}_A + \vec{IA} \times \vec{\omega} = \vec{0} \qquad (VII.10)$$

$$IA \cdot \omega = V_A \Rightarrow IA = d = \frac{V_A}{\omega} \qquad (VII.11)$$

En resumen, podemos reducir el movimiento plano a solo un giro si lo referimos al c.i.r. o a una traslación más un giro si lo referimos a cualquier otro punto A. Basta pues con conocer los datos (I, ω) o ($\vec{V}_A$, ω).

VII.8.3 OBTENCIÓN DE LAS POLARES

Hasta ahora hemos estudiado exclusivamente el movimiento en un instante determinado, pero lo que nos interesa es hacerlo a lo largo del tiempo y una forma es analizar lo que pasa con el C.I.R. puesto que su conocimiento define el movimiento. En otras palabras, encontrar las polares del movimiento plano, definidas como lugar geométrico de los puntos que van siendo en el tiempo centro instantáneo de rotación, obteniéndose la Polar Móvil con los puntos de la sección plana del sólido que van siendo I_M (referidos a ejes móviles y por tanto acompañando al sólido en su movimiento) y la Polar Fija con los puntos del plano director que van siendo I_F (referidos a ejes fijos y por tanto inmóviles).

La expresión cartesiana de las polares puede deducirse de las ecuaciones de los axoides (*VII.5 a 8*) tomando ejes fijos oxy y ejes móviles o'x'y' en el plano de la figura, lo que corresponde a $\omega_x = \omega_y = \omega'_x = \omega'_y = 0$, debiendo ser nulos en las fórmulas indicadas los numeradores correspondientes y $\omega_z = \omega'_z = \omega$; $z = z' = 0$, obteniéndose:

a) Refiriendo el movimiento al origen O del sistema fijo:				b) Refiriendo el movimiento al origen O' del sistema móvil:			
Polar fija:	$v_{ox} - y\omega = 0$ $v_{oy} + x\omega = 0$	**Polar móvil:**	$v_{ox'} - (y' - y'_o)\omega = 0$ $v_{oy'} + (x' - x'_o)\omega = 0$	**Polar fija:**	$v_{o'x} - (y - y_o)\omega = 0$ $v_{o'y} + (x - x_o)\omega = 0$	**Polar móvil:**	$v_{o'x'} - y\omega = 0$ $v_{o'y'} + x\omega = 0$

Naturalmente, ecuaciones análogas pueden obtenerse directamente con gran sencillez de la (*VII.10*). Proyectando sobre ejes fijos obtendremos la trayectoria del punto que está "debajo" del que no tiene velocidad en el plano móvil; es decir, LA POLAR FIJA:

$$(V_{Ax}\vec{i} + V_{Ay}\vec{j}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A - x & y_A - y & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \left. \begin{matrix} V_{Ax} + \omega(y_A - y) = 0 \\ V_{Ay} - \omega(x_A - x) = 0 \end{matrix} \right| \Rightarrow \left| \begin{matrix} \frac{V_{Ax}}{\omega} + y_A = y \\ \frac{V_{Ay}}{\omega} - x_A = -x \end{matrix} \right| \qquad (VII.16)$$

ecuaciones paramétricas (función del tiempo) de las que, eliminando *t*, obtendremos φ(x y)=0.

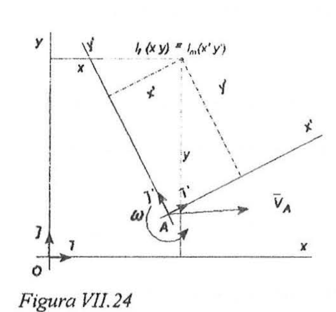


Figura VII.24

Análogamente, proyectando sobre ejes móviles y tomando el origen del sistema móvil en el punto A de referencia del movimiento, A≡O', con su velocidad incluida ya que estudiamos velocidades absolutas, obtendremos:

$$(V_{Ax'}\vec{i}' + V_{Ay'}\vec{j}') + \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ -x' & -y' & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \left. \begin{matrix} V_{Ax'} - \omega y' = 0 \\ V_{Ay'} + \omega x' = 0 \end{matrix} \right| \Rightarrow \left| \begin{matrix} \frac{V_{Ax'}}{\omega} = y' \\ \frac{V_{Ay'}}{\omega} = -x' \end{matrix} \right| \qquad (VII.17)$$

ecuaciones paramétricas de LA POLAR MÓVIL de las que, eliminando *t*, obtendremos ϕ(x' y')=0.

VII.9 ACELERACIONES

Dado que estamos metidos en una "dinámica" que es respuesta a las fuerzas, necesitamos de las aceleraciones para resolver los problemas en Cinemática del sólido rígido. Su definición es obvia como derivada de los vectores velocidad, pero su obtención puede complicarse ligeramente algo más que en la cinemática del punto, sobre todo si se trata de un movimiento general ya que intervienen los vectores instantáneos de rotación y sus variaciones tanto en módulo como en dirección.

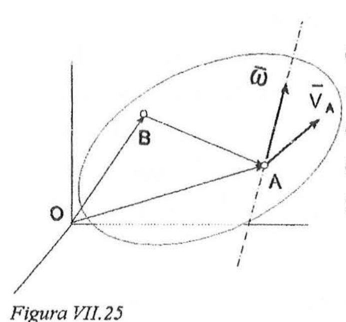


Figura VII.25

Obviamente no podremos derivar los valores particularizados a un instante determinado de la velocidad en un punto pero sería interesante encontrar una expresión análoga a la de la velocidad que nos refiriese a valores conocidos de la aceleración de otro punto en un mismo instante. Para ello referiremos el movimiento a un punto A y derivaremos la expresión general de la velocidad instantánea en un punto B del sólido (*VII.4*) respecto del tiempo obteniendo:

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{BA}}{dt} \times \vec{\omega} + \vec{BA} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (VII.18)$$

pero $\vec{BA} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{OA} - \vec{OB}$ es un vector de módulo constante al pertenecer A y B al sólido, y solo puede variar en dirección, debido al giro $\vec{\omega}$, por lo que su derivada ha de coincidir con la velocidad del extremo del vector debida a la rotación del cuerpo:

$$\frac{d\vec{BA}}{dt} = \frac{d(\vec{OA}-\vec{OB})}{dt} = \vec{V}_A - \vec{V}_B = \vec{V}_A - (\vec{V}_A + \vec{BA}\times\vec{\omega}) = -\vec{BA}\times\vec{\omega} \qquad (VII.19)$$

luego, sustituyendo su valor en (*VII.18*) obtendremos:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\omega}\times(\vec{BA}\times\vec{\omega}) + \vec{BA}\times\frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (VII.20)$$

que determina la aceleración en cualquier punto, conocida la de uno de ellos y las características de la rotación ($\vec{\omega}, \frac{d\vec{\omega}}{dt}$).

Esta expresión solo tendrá simplificación para el ***MOVIMIENTO PLANO*** en el que se verifica que $\vec{BA} \perp \vec{\omega} \Rightarrow \vec{BA}\cdot\vec{\omega} = 0$ y que la dirección de la rotación no varía, ya que podremos escribir:

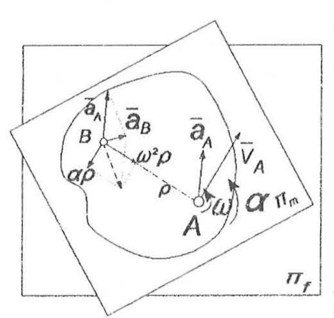


Figura VII.26

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\omega\vec{e}_r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{e}_r + \omega\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{e}_r = \alpha\,\vec{e}_r = \vec{\alpha} \qquad (VII.21)$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{BA}\times\vec{\omega}) = \vec{BA}\,(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}) - \vec{\omega}\,(\vec{\omega}\cdot\vec{BA}) = \omega^2\,\vec{BA} \qquad (VII.22)$$

y sustituyendo ambas expresiones en la (*VII.20*) haciendo $\vec{BA} = \rho\;\vec{e}_{BA}$ resulta:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \omega^2\vec{BA} + \alpha\;\vec{BA}\times\vec{e}_R = \vec{a}_A + \omega^2\rho\;\vec{e}_{BA} + \alpha\;\rho\;(\vec{e}_{BA}\times\vec{e}_R) \qquad (VII.23)$$

expresión que puede interpretarse paralelamente a la del vector velocidad como una aceleración por traslación $\vec{a}_A$ más una aceleración por giro, viniendo ésta última expresada (*fig.VII.26*) mediante sus componentes tangencial, $\alpha\,\rho$, y normal, $\omega^2\rho$.

Solo quedaría saber si existe algún punto que no tuviera aceleración, como ocurría con el c.i.r. para la velocidad, punto que, por lo general, no va a ser el que buscamos ya que ocupará en cada instante un punto distinto de la sección plana del sólido y, en consecuencia, el punto que ocupaba en el instante anterior tendrá de nuevo velocidad respecto al c.i.r. de "turno" y para poder variar la velocidad por fuerza ha de tener aceleración.

El punto que no tiene aceleración será otro que sí tiene velocidad y que obtendremos anulando entre sí las distintas componentes de la aceleración.

VIII. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

VIII.1 NATURALEZA DE LOS SISTEMAS REFERENCIALES NO INERCIALES.

Como recordaremos, habíamos clasificado los marcos referenciales en Inerciales, si permanecían en reposo o se movían con traslación uniforme, y en No Inerciales todos los demás. Pero hasta ahora solo hemos determinado las expresiones del movimiento de los cuerpos respecto a un sistema o marco referencial sin incidir en la naturaleza del mismo, bien por considerar que se trata de un marco inercial (sistema fijo) o porque, sin llegar a serlo, a los efectos del problema que nos ocupa podríamos considerarnos como "espectadores" ligados al propio marco no inercial (sistema móvil). No obstante, puede presentarse la necesidad de referir un mismo movimiento a un sistema de ejes oxyz una vez determinadas las ecuaciones respecto a otro o'x'y'z', pudiendo diferir sensiblemente las características del movimiento en función del sistema de referencia.

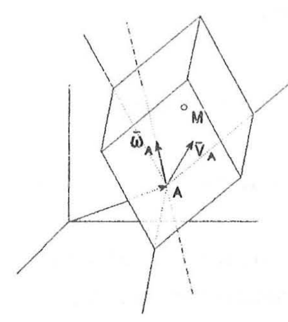


Figura VIII.1

Si considerásemos un marco de naturaleza *NO INERCIAL* como un sólido inmaterial que pudiera desplazarse en el espacio, el conocimiento de su movimiento podría entonces abordarse como el de un sólido de los que acabamos de estudiar en el tema anterior, para lo cual sería pues necesario conocer exclusivamente los valores instantáneos de la velocidad de uno de sus puntos y la rotación en torno a él, lo que se conocerá como *MOVIMIENTO DE ARRASTRE.* El movimiento respecto al marco No Inercial se denominará *MOVIMIENTO RELATIVO* y como el conocimiento de un marco no inercial, que sabemos o hemos determinado que lo es, presupone un marco inercial al cual referirse, lo primero que tenemos que hacer es presuponer la existencia de dicho marco inercial.

El *MOVIMIENTO ABSOLUTO* será entonces el movimiento con relación a un marco referencial inercial que sabemos o presuponemos que lo es y será la composición de un movimiento como si fuera parte de la caja (de arrastre) y otro respecto a ella (relativo) y aunque parezca obvio que se va a tratar de la suma de esos dos movimientos, el aparato matemático demostrará analíticamente que así es.

VIII.2 DERIVADA DE UN VECTOR EN EJES MÓVILES.

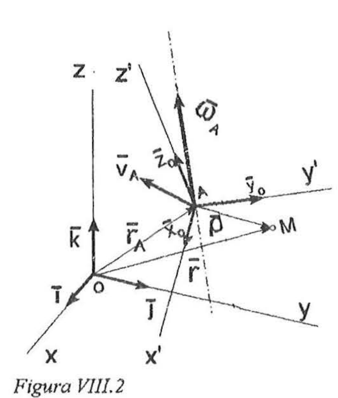


Figura VIII.2

Consideremos el vector de posición de un punto cualquiera M referido a dos sistemas: uno fijo xyz, y otro móvil x'y'z', cuyo origen A es el punto de reducción del movimiento del marco no inercial, de forma que $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}$. Al derivar respecto al tiempo obtendremos:

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{V}_A + \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right) \qquad (VIII.1)$$

pero, la derivada de un vector $\vec{\rho} = x'\vec{x}_o + y'\vec{y}_o + z'\vec{z}_o$ expresado en ejes móviles de unitarios variables en dirección puede escribirse como:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\vec{x}_o + \frac{dy'}{dt}\vec{y}_o + \frac{dz'}{dt}\vec{z}_o\right) + \left(x'\frac{d\vec{x}_o}{dt} + y'\frac{d\vec{y}_o}{dt} + z'\frac{d\vec{z}_o}{dt}\right) \qquad (VIII.2)$$

y teniendo en cuenta que los unitarios $\vec{x}_o$, $\vec{y}_o$, $\vec{z}_o$ son constantes respecto al sistema móvil, podemos entender el primer sumando como la velocidad de variación de $\vec{\rho}$ tal como la calcularía un observador ligado al sistema móvil; o, dicho de otro modo, la velocidad del punto M relativa a aquél:

$$\left(\frac{dx'}{dt}\vec{x}_o + \frac{dy'}{dt}\vec{y}_o + \frac{dz'}{dt}\vec{z}_o\right) = \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{mov}$$

mientras que la variación de los unitarios respecto al sistema fijo podrá expresarse en función de la rotación del "sólido vacío" reducida en el origen A:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{d\vec{x}_o}{dt} = \vec{\omega}_A \times \vec{x}_o \\ \frac{d\vec{y}_o}{dt} = \vec{\omega}_A \times \vec{y}_o \\ \frac{d\vec{z}_o}{dt} = \vec{\omega}_A \times \vec{z}_o \end{array}\right| \Rightarrow x'\frac{d\vec{x}_o}{dt} + y'\frac{d\vec{y}_o}{dt} + z'\frac{d\vec{z}_o}{dt} = x'(\vec{\omega}_A \times \vec{x}_o) + y'(\vec{\omega}_A \times \vec{y}_o) + z'(\vec{\omega}_A \times \vec{z}_o) = (\vec{\omega}_A \times x'\vec{x}_o) + (\vec{\omega}_A \times y'\vec{y}_o) + (\vec{\omega}_A \times z'\vec{z}_o) = \vec{\omega}_A \times (x'\vec{x}_o + y'\vec{y}_o + z'\vec{z}_o) = \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}$$

quedando la *(VI.2)* en la forma: $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{mov} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ que sustituida en la *(VIII.1)* nos da la expresión:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{mov} + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho} = \left(\vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}\right) + \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{mov} \qquad (VIII.3)$$

generalización de la ecuación fundamental del movimiento del sólido rígido, que podríamos haber obtenido intuitivamente.

VIII.3 VELOCIDAD ABSOLUTA, DE ARRASTRE Y RELATIVA. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS.

En la *(VIII.3)* el término $\vec{V}_M^{(a} = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}$ puede entenderse como la velocidad que tendría M si fuera parte del sólido solidario con el sistema móvil (velocidad de arrastre) y $\left[\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right]_{mov} = \vec{V}_M^{(r}$ la velocidad del punto M relativa a los ejes móviles considerados como "fijos".

Es decir, la *VELOCIDAD ABSOLUTA* respecto de un marco que consideramos inercial (fijo) se obtendrá sumando en cada instante la *VELOCIDAD RELATIVA* a otro marco que se mueve respecto al primero y la *VELOCIDAD de ARRASTRE* de éste, por considerarse a su vez parte del sistema móvil:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_M^{(r} + \vec{V}_M^{(a} \qquad (VIII.4)$$

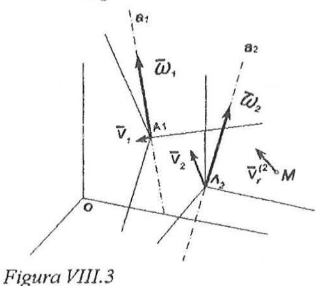


Figura VIII.3

De no ser inercial el nuevo marco sino que encontramos otro de orden superior respecto al que se mueven los otros dos conjuntamente, dicha velocidad absoluta sería en realidad la velocidad relativa a ese marco y obtendríamos la nueva velocidad absoluta añadiendo la velocidad de arrastre correspondiente:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_M^{(a_1} + \vec{V}_M^{(r_1} = \vec{V}_M^{(a_1} + [\ \vec{V}_M^{(a_2} + \vec{V}_M^{(r_2}\ ] \qquad (VIII.5)$$

repitiendo el proceso tantas veces como fuera necesario, lo que indica que puede entenderse la velocidad absoluta como sucesivas velocidades de arrastre de distintos marcos no inerciales incluidos unos en los otros y una velocidad relativa final al marco no inercial más "interior":

$$\begin{aligned}\vec{V}_M &= \vec{V}_M^{(a} + \vec{V}_M^{(r} = \vec{V}_M^{(a_1} + [\,\vec{V}_M^{(a_2} + \vec{V}_M^{(r_2}\,] = \\ &= \vec{V}_M^{(a_1} + \vec{V}_M^{(a_2} + [\,\vec{V}_M^{(a_3} + \vec{V}_M^{(r_3}\,] = \\ &= \vec{V}_M^{(a_1} + \vec{V}_M^{(a_2} + \dots + \vec{V}_M^{(a_n} + \vec{V}_M^{(r_n}\end{aligned} \qquad (VIII.6)$$

Ahora bien; nosotros podemos elegir un marco no inercial en un punto $\mathbf{A}_1$ de forma que la velocidad de arrastre sea sólo un giro alrededor del eje $\mathbf{a}_1$ y descomponer la velocidad relativa a éste $\vec{V}_r^{(1}$ como otra velocidad de arrastre de un nuevo marco en un punto $\mathbf{A}_2$ que gire exclusivamente respecto a un eje $\mathbf{a}_2$ y una nueva velocidad relativa a él y así sucesivamente con los n movimientos de arrastre:

El objetivo de este proceso es tratar de conseguir que dicha velocidad relativa final sea nula; es decir, convertir todos los posibles movimientos elementales en "arrastres" y como caso más particular que todos los arrastres sean giros; es decir, que el último de los arrastres sea tambien un giro.

$$\begin{aligned}\vec{V}_M^{(a_n} &= \vec{MA}_n \times \vec{\omega}_n \\ \vec{V}_M^{(a_{n-1}} &= \vec{MA}_{n-1} \times \vec{\omega}_{n-1} \\ &\dots \\ \vec{V}_M^{(a_1} &= \vec{MA}_1 \times \vec{\omega}_1\end{aligned} \qquad (VIII.7)$$

$$\vec{V}_M = \vec{MA}_n \times \vec{\omega}_n + \vec{MA}_{n-1} \times \vec{\omega}_{n-1} + \dots \dots \dots \dots + \vec{MA}_1 \times \vec{\omega}_1 \qquad (VIII.8)$$

Figura VIII.4

expresión que no es otra que la suma de momentos de un sistema de vectores deslizantes (rotaciones $\vec{\omega}_i$) respecto a un punto M del sólido considerado, proceso inverso al de la obtención de la ecuación fundamental $\vec{V}_M = \vec{V}_P + \vec{MP} \times \vec{\Omega}$ en el que reducíamos el movimiento a una sola rotación $\vec{\Omega} = \Sigma\vec{\omega}_i$ que colocábamos en un punto P de velocidad conocida $\vec{V}_P$.

Este sistema de vectores deslizantes se podrá reducir a un solo vector resultante $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega} + \vec{\omega}'$ y a un par y, por lo tanto, a una rotación y un par; la primera responsable de su movimiento de giro y el segundo de su movimiento de traslación. Si el punto O_1 de aplicación de $\vec{\omega}_1$ está elegido sobre el eje central, éste será el eje instantáneo de rotación y deslizamiento en el movimiento absoluto del sólido S'.

Generalizando, si un sólido es sometido simultáneamente a un sistema $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, ... $\vec{\omega}_n$ de rotaciones sobre ejes que pasan por puntos O_1, O_2, ... O_n, un punto P del mismo poseerá una velocidad:

$$\vec{v}_p = \sum_{i=1}^{n} \vec{PO}_i \times \vec{\omega}_i \qquad (VIII.9)$$

y determinaremos el eje instantáneo de rotación y deslizamiento en su movimiento absoluto sin más que determinar el eje central del sistema de vectores deslizantes $\vec{\omega}_i$; la resultante y momento resultante respecto a un punto del eje nos darán la velocidad de rotación y deslizamiento respectivamente.

Si las rotaciones son paralelas tienen una resultante única que se obtiene según las reglas de composición de vectores paralelos; dos rotaciones paralelas iguales y de sentidos contrarios forman un par de rotaciones que produce una distribución de velocidades constante en módulo, dirección y sentido para cada uno de los puntos del sólido. Representa pues una traslación normal al plano del par e igual a su momento. Recíprocamente, toda traslación puede sustituirse de infinitas maneras por un par de rotaciones.

Si se trata de un sistema de rotaciones concurrentes se pueden sustituir estas rotaciones por otra cuyo eje pase por el mismo punto de concurso y cuya dirección, sentido y módulo corresponda a la resultante obtenida al componer, por la regla del polígono, los vectores que representan las rotaciones dadas.

Si los movimientos de arrastre y relativo del sólido son traslaciones y aplicamos la regla de composición de velocidades a cada uno de los puntos del sólido obtendremos, evidentemente, velocidades absolutas iguales, en cada instante, para todos los puntos ya que las componentes son también iguales y paralelas. El movimiento resultante será, pues, una traslación.

VIII.4 COMPOSICIÓN DE ACELERACIONES.

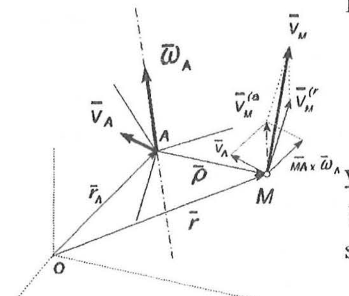


Figura VIII.5

Derivando la expresión (VI.3) obtenida para la velocidad absoluta de un punto M:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}\right) + \frac{d\vec{V}_M^{(r}}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_A}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_A \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \frac{d\vec{V}_M^{(r}}{dt} \qquad (VIII.10)$$

y descomponiendo las derivadas absolutas de los vectores expresados en ejes móviles $\vec{\rho}$ y $\vec{V}_M^{(r}$ mediante su variación relativa a los ejes móviles y el giro como si fueran solidarios con éstos:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{mov} + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \left(\frac{d\vec{V}_M}{dt}\right)_{mov} + \vec{\omega}_A \times \vec{V}_M^{(r}$$

obtendremos la expresión correspondiente a la aceleración absoluta del punto:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}_A}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_A \times \left[\left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{mov} + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}\right] + \left[\left(\frac{d\vec{V}_M}{dt}\right)_{mov} + \vec{\omega}_A \times \vec{V}_M^{(r}\right] =$$

$$= \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}_A}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_A \times \vec{V}_M^{(r} + \vec{\omega}_A \times [\vec{\omega}_A \times \vec{\rho}] + \vec{a}_M^{(r} + \vec{\omega}_A \times \vec{V}_M^{(r} = \qquad (VIII.11)$$

$$= \left[\vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}_A}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_A \times [\vec{\omega}_A \times \vec{\rho}]\right] + \vec{a}_M^{(r} + \left[2\,\vec{\omega}_A \times \vec{V}_M^{(r}\right] = \vec{a}_M^{(a} + \vec{a}_M^{(r} + \vec{a}_M^{(c}$$

que interpretaremos como compuesta por los siguientes términos:

- la aceleración del punto M como si formara parte solidaria con el sistema móvil: aceleración **de arrastre,** $\vec{a}_M^{(a}$
- la aceleración del punto M **relativa** a los ejes móviles: $\vec{a}_M^{(r}$
- un término **complementario**: $\vec{a}_M^{(c}$ o de "acoplamiento" que se conoce como de Coriolis y cuyo efecto se dejará sentir en Dinámica.

En resumen, no ocurre lo mismo que con la velocidad, en la que solo aparecían la velocidad de arrastre y la relativa, sino que habrá que tener en cuenta, por lo general, el término complementario que sólo se anulará:

a) si el movimiento de arrastre es una traslación, por lo que: $\omega_A = 0 \Rightarrow 2\,\vec{\omega}_A \times \vec{V}_M^{(r} = 0$

b) si el movimiento relativo es paralelo a la rotación, esto es: $\vec{\omega}_A \parallel \vec{V}_M^{(r} \Rightarrow 2\,\vec{\omega}_A \times \vec{V}_M^{(r} = 0$

VIII.5 MOVIMIENTO RELATIVO ENTRE SÓLIDOS TANGENTES.

Se trata de estudiar cómo un sólido ve a otro que se mueve si en realidad se mueven los dos y, sobre todo, cual es la condición para que se mantengan tangentes en el movimiento si al principio lo eran, o bien, cómo tiene que ser la velocidad en los puntos de contacto para que eso ocurra. Supongamos que los sólidos I y II de la figura se mueven de forma que sus superficies se mantienen tangentes en un punto A, por lo que el plano tangente en dicho punto será común a los dos.

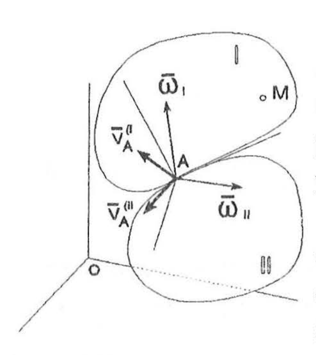


Figura VIII.6

Como lo que nos interesa es el punto de contacto, reducimos el movimiento absoluto de ambos sólidos al punto de cada uno en contacto con el otro A_1 y A_2 de forma que el del sólido I será: $\vec{V}_A^{(I}$ y $\vec{\omega}_I$ y el del sólido II: $\vec{V}_A^{(II}$ y $\vec{\omega}_{II}$. El movimiento absoluto de cualquier punto M, por ejemplo del sólido I, podrá expresarse mediante sus componentes de arrastre y relativa: $\vec{V}_M = \vec{V}_M^{(a} + \vec{V}_M^{(r}$ de forma que, despejando la relativa tendremos $\vec{V}_M - \vec{V}_M^{(a} = \vec{V}_M^{(r}$ y como estudiar el movimiento relativo de un sólido respecto al otro equivale a imaginar quieto uno de ellos mientras que el otro se mueve "por los dos" conseguiremos ese efecto sumando a ambos sólidos un movimiento igual y contrario al que imaginaremos "quieto", por ejemplo el II, sin más que añadir un giro y un par iguales y opuestos a los que caracterizan su movimiento, como ya hemos visto.

De esta forma, la velocidad del punto M vista "desde" el sólido II podrá expresarse como la que tiene por pertenecer al sólido I más la que le hemos añadido al dejar quieto el sólido II: $\vec{V}_M^{(I} - \vec{V}_M^{(II} = \vec{V}_M^{(r}$ y como ambos movimientos están reducidos al mismo punto será:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{V}_M^{(I} = \vec{V}_A^{(I} + \vec{MA} \times \vec{\omega}_I \\ \vec{V}_M^{(II} = \vec{V}_A^{(II} + \vec{MA} \times \vec{\omega}_{II} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{V}_M^{(r} = \vec{V}_M^{(I} - \vec{V}_M^{(II} = \vec{V}_A^{(I} - \vec{V}_A^{(II} + \vec{MA} \times (\vec{\omega}_I - \vec{\omega}_{II}) \Rightarrow \vec{V}_M^{(r} = \vec{V}_A^{(r} + \vec{MA} \times \vec{\omega}_r$$

expresión equivalente a la del movimiento absoluto, lo cual nos indica que da igual resolver el problema en movimiento relativo o en movimiento absoluto.

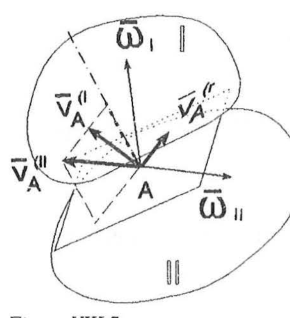


Figura VIII.7

En estos términos, la condición para que ambos sólidos permanezcan tangentes, sin separarse entre sí ni incrustarse uno en otro, es que en el instante siguiente la velocidad relativa del punto de contacto uno de los sólidos respecto al otro, $\vec{V}_A^{(r} = \vec{V}_A^{(I} - \vec{V}_A^{(II}$, siga contenida en el plano tangente común, o lo que es lo mismo, que no tenga componente según la normal a la superficie. Siendo $\vec{n}$ el unitario en dicha dirección, la condición de tangencia se expresará:

$$\vec{V}_A^{(r} \cdot \vec{n} = \left[\vec{V}_A^{(I} - \vec{V}_A^{(II}\right] \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{V}_A^{(I} \cdot \vec{n} - \vec{V}_A^{(II} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{V}_A^{(I} \cdot \vec{n} = \vec{V}_A^{(II} \cdot \vec{n} \qquad (VIII.12)$$

es decir, la proyección de las velocidades en el punto de contacto sobre la normal común sean iguales e igualmente orientadas, dando igual si el movimiento de I es relativo a II que se mueve o si se trata del movimiento absoluto y II no se mueve, como acabamos de demostrar. Pero eso no indica que la proyección sobre el plano tangente también lo tenga que ser. Lo sería si la velocidad de uno y otro punto fuese la misma, pero en general no es así y existe velocidad relativa de uno respecto a otro. Esta velocidad se denomina "***velocidad de deslizamiento***" porque expresa el deslizamiento entre ambos sólidos que no dejan de ser tangentes.

Nuestro interés ahora es analizar el resto del movimiento para estudiar más adelante los efectos de cada uno cuando aparezcan los rozamientos (deslizamiento, rodadura y pivotamiento). Por eso descompondremos tambien la rotación relativa $\vec{\omega}_r$ en dos componentes: $\vec{\omega}_R$, proyección de $\vec{\omega}_r$ sobre el plano tangente a las superficies en el punto de contacto, y $\vec{\omega}_P$, normal al mismo, que denominaremos "***rotación de rodadura***" y "***rotación de pivotamiento***", respectivamente.

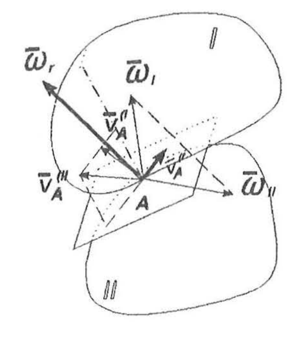


Figura VIII.8

El movimiento general del sólido queda así descompuesto en tres movimientos simples:

$$
\begin{array}{llll}
v_A \neq 0 & \omega_r = 0 & \omega_p = 0: & \textit{deslizamiento puro} \\
v_A = 0 & \omega_r \neq 0 & \omega_p = 0: & \textit{rodadura pura} \\
v_A = 0 & \omega_r = 0 & \omega_p \neq 0: & \textit{pivotamiento puro}
\end{array}
\qquad (VIII.13)
$$

En el caso más general, el sólido tangente realiza, simultáneamente, los tres movimientos de rodadura, pivotamiento y deslizamiento:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{MA} \times \vec{\omega}_R + \vec{MA} \times \vec{\omega}_P = \vec{V}_A + \vec{MA} \times (\vec{\omega}_R + \vec{\omega}_P) = \vec{V}_A + \vec{MA} \times \vec{\omega}$$

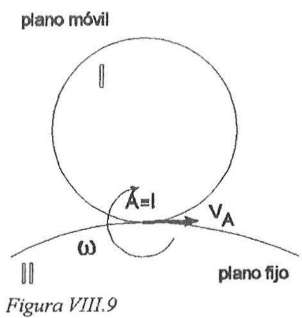


Figura VIII.9

El movimiento que más nos interesa, el ***movimiento plano*** de dos sólidos, en que la rotación es normal a un plano fijose caracteriza porque *NO HAY ROTACIÓN DE PIVOTAMIENTO* y la condición para que un cuerpo con movimiento plano ruede sin deslizar sobre otro "quieto" es que además de cumplir la condición de tangencia y de ausencia de pivotamiento no tenga velocidad (relativa) el punto de contacto A, con lo que ello conlleva ya que el único punto del plano móvil que no tiene velocidad en cada instante es el c.i.r. A≡I. En consecuencia, las curvas de los planos móvil y fijo serán respectivamente las polares móvil y fija.

ÍNDICE

V. FUNCIONES PARAMÉTRICAS

V.1. SISTEMA DE REFERENCIA 1
V.2. PUNTO GEOMÉTRICO, PUNTO FÍSICO Y PUNTO MATERIAL 1
V.3. VECTOR DE POSICIÓN. VARIACIÓN. DESPLAZAMIENTO. 2
V.4. GRADOS DE LIBERTAD DEL PUNTO FÍSICO O MATERIAL. 2
V.4.1 Punto Libre 2
V.4.2 Punto Ligado a una superficie 3
V.4.3 Punto Ligado a una Línea 3
V.4.4 Punto Fijo 4
V.5. FUNCIÓN VECTORIAL DE UN PARÁMETRO. DERIVADA Y DIFERENCIAL. 4
V.6. COMPONENTES DE LA DERIVADA DE UN VECTOR 7
V.7. DERIVACIÓN DE LAS OPERACIONES VECTORIALES 7

VI. CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

VI.1. MOVIMIENTO Y SISTEMA DE REFERENCIA 9
VI.2. DEFINICIONES CINEMÁTICAS 10
VI.2.1 Trayectoria 10
VI.2.2 Velocidad 10
VI.2.3 Hodógrafa 11
VI.2.4 Aceleración 12
VI.3. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN 12
VI.4. EXPRESIONES CARTESIANAS DEL MOVIMIENTO 14
VI.5. EXPRESIONES EN COORDENADAS POLARES 16
VI.5.1 Velocidad 17
VI.5.2 Aceleración. 18
VI.6. MOVIMIENTO RELATIVO Y ABSOLUTO 19

VII. CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

VII.1. GENERALIDADES. ELECCIÓN DE FORMA DE ESTUDIO 20
VII.2. CONDICIÓN GENERAL DE RIGIDEZ 21
VII.3. MOVIMIENTOS ELEMENTALES: TRASLACIÓN Y ROTACIÓN. ECUACIÓN FUNDAMENTAL 22
VII.4. IMAGEN GENERAL DEL MOVIMIENTO DEL SÓLIDO RÍGIDO 24
VII.5. EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN Y DESLIZAMIENTO; MOVIMIENTO HELICOIDAL 25
VII.6. AXOIDES: FIJO Y MÓVIL 26
VII.7. SÓLIDO CON UN PUNTO FIJO; CONOS DE POINSOT 28
VII.8. MOVIMIENTO PLANO DE UN SÓLIDO 29
VII.8.1 Centro Instantáneo de rotación. Propiedades. 30
VII.8.2 Distribución de velocidades 31
VII.8.3 Obtención de las Polares 31
VII.9. ACELERACIONES 32

VIII. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

VIII.1. NATURALEZA DE LOS SISTEMAS REFERENCIALES NO INERCIALES. 34
VIII.2. DERIVADA DE UN VECTOR EN EJES MÓVILES. 34
VIII.3. VELOCIDAD ABSOLUTA, DE ARRASTRE Y RELATIVA. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS. 35
VIII.4. COMPOSICIÓN DE ACELERACIONES. 37
VIII.5. MOVIMIENTO RELATIVO ENTRE SÓLIDOS TANGENTES. 38

CUADERNO

9.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/ijh/apuntes.html